Кротова Елена Львовна

Цылова Елена Григорьевна

Осипов Никита Романович

Филиппов Михаил Александрович

ОБЗОР И ИССЛЕДОВАНИЕ ОБЛАСТИ ПРИМЕНИМОСТИ ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ СЛАУ

Ключевые слова*: математическое моделирование, численные методы, СЛАУ.*

Статья посвящена анализу современных численных методов решения СЛАУ. Особое внимание авторы уделяют исследованию области применимости рассмотренных методов. Современные численные методы зачастую сводятся и решению СЛАУ, поэтому вопрос остаётся актуальным в настоящее время.

Keywords*: numerical methods, mathematical modeling, linear algebraic equation system.*

This article analyzes the modern numerical methods for solving linear algebraic equation system. They focus on the study of the field of applicability of the methods considered. Modern numerical methods often come down and solve linear algebraic equation system, so the question remains relevant today.

Введение

В статье рассматриваются различные численные методы решения СЛАУ и проведения их сравнительного анализа.

Современное развитие техники и физики тесно связано с использованием электронных вычислительных машин (ЭВМ). В настоящее время ЭВМ стали обычным оборудованием многих университетов и конструкторских бюро. Это позволило от простейших расчетов и оценок различных конструкций или процессов перейти к новой стадии работы – детальному математическому моделированию, которое существенно сокращает потребность в натуральных экспериментах, а в ряде случаев может их заменить.

На практике в большинстве случаев найти точное решение возникшей математической задачи не удается. Это происходит главным образом не потому, что мы не умеем этого делать, а поскольку искомое решение обычно не выражается в привычных для нас элементарных или других известных функциях. Поэтому важное значение приобретают численные методы особенно в связи с возрастанием роли математических методов в различных областях науки и техники и с появлением высокопроизводительных ЭВМ.

В этой работе мы расскажем о некоторых численных методах решения систем линейных уравнений, об их свойствах, достоинствах и недостатках, а также выявим некоторые признаки систем линейных уравнений, указывающие на самый оптимальный метод решения.

Постановка задачи [5]

Прикладные задачи, характерные для проектирования современных объектов новой техники, часто сводятся к многомерным в общем случае нелинейным уравнениям, которые решаются методом линеаризации, т.е. сведением нелинейных уравнений к линейным. В общем случае система nуравнений с n неизвестными записывается в виде

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

где $f_1, f_2, \dots, f_n$ – функции nпеременных, нелинейные или линейные (x_i в функции f_i входят в первых или частично в нулевых степенях).

Здесь рассматривается частный случай задачи (1) – линейная неоднородная задача для систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), которая сокращенно записывается в виде

$$Ax = b \text{ или } \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}, \qquad (2)$$

где $A = (a_{ij} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ – действительная матрица размера $(n \times n), i, j$ – переменные, соответствующие номерам строк и столбцов (целые числа); $b = (b_1, \dots, b_n)^T \in \mathbb{R}^n$ – вектор-столбец размера $(n \times 1), x = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ – вектор-столбец неизвестных, $\mathbb{R}^n$ – n-мерное евклидово пространство, верхний индекс Tздесь и далее обозначает операцию транспонирования. Требуется найти решение $x_* = (x_{*1}, \dots, x_{*n})^T \in \mathbb{R}^n$ системы (2), подстановка которого в (2) приводит к верному равенству $Ax_* = b$.

Число обусловленности [5]

Характер задачи и точность получаемого решения в большой степени зависят от ее обусловленности, являющейся важнейшим математическим понятием, влияющим на выбор метода ее решения. Поясним это понятие на примере двумерной задачи: $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases}$. Точным решением этой задачи является вектор $x_* = (x_{*1}, x_{*2})^T$, компоненты которого определяются координатами точки пересечения двух прямых, соответствующих уравнениям $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$, $a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2$ (рис. 1 а, б).

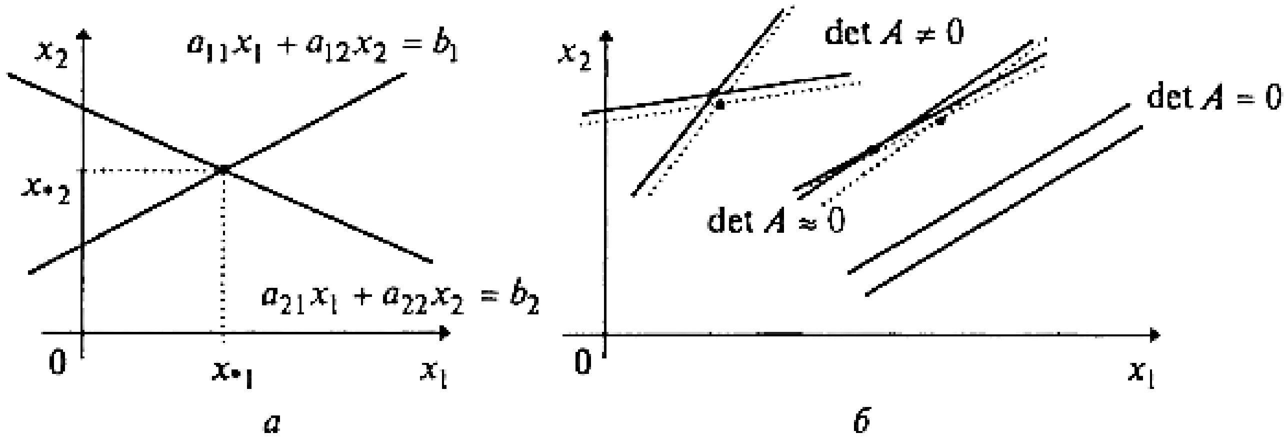

Рис. 1

На рис. 1 б применительно к трем наборам входных данных, заданных с некоторыми погрешностями и соответствующих различным системам линейных уравнений, иллюстрируется характер обусловленности системы. Если $\det A$ существенно отличен от нуля, то точка пересечения пунктирных прямых, смещенных относительно сплошных прямых из-за погрешностей задания A и b, сдвигается несильно. Это свидетельствует о хорошей обусловленности системы. При $\det A \approx 0$ небольшие погрешности в коэффициентах могут привести к большим погрешностям в решении (плохо обусловленная задача), поскольку прямые близки к параллельным. При $\det A = 0$ прямые параллельны или они совпадают, и тогда решение задачи не существует или оно не единственно (3).

Метода Гаусса [2; 5]

Запишем систему $Ax = f$, в развернутом виде

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = f_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = f_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = f_n. \end{cases}$$

Метод Гаусса состоит в последовательном исключении неизвестных из этой системы. Предположим, что $a_{11} \neq 0$. Последовательно умножая первое уравнение на $-\frac{a_{i1}}{a_{11}}$ и складывая с i-м уравнение, исключим x_1 из всех уравнений кроме первого.

Получим систему

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = f_1, \\ a_{22}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{2n}^{(1)}x_n = f_2^{(1)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n2}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{2n}^{(1)}x_n = f_m^{(1)}, \end{cases}$$

где $a_{ij}^{(1)} = a_{ij} - \dfrac{a_{i1}a_{1j}}{a_{11}}, f_i^{(1)} = f_i - \dfrac{a_{i1}f_1}{a_{11}}, i, j = 2{,}3 \ldots n.$

Аналогичным образом из полученной системы исключим x_2. Последовательно, исключая все неизвестные, получим систему треугольного вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1k}x_k + \ldots + a_{1n}x_n = f_1, \\ a_{22}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{2k}^{(1)}x_k + \ldots + a_{2n}^{(1)}x_n = f_2^{(1)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n-1,n-1}^{(n-1)}x_{n-1} + a_{n-1,n}^{(n-1)}x_n = f_{n-1}^{(n-1)}, \\ a_{n,n}^{(n-1)}x_n = f_n^{(n-1)} \end{cases}$$

Описанная процедура называется прямым ходом метода Гаусса. Заметим, что ее выполнение было возможно при условии, что все $a_{i,i}^{(l)}, l = 1{,}2 \ldots n\text{-}1$ не равны нулю.

Выполняя последовательные подстановки в последней системе, (начиная с последнего уравнения) можно получить все значения неизвестных.

$$x_n = \frac{f_n^{(n-1)}}{a_{n,n}^{(n-1)}}, x_i = \frac{1}{a_{i,i}^{(i-1)}}(f_i^{(i-1)} - \sum_{j=i-1}^{n} a_{ij}^{(i-1)}x_i).$$

Эта процедура получила название обратный ход метода Гаусса.

Алгоритм численного метода Гаусса

1. Прямой ход.

а) положить номер шага $k = 1$. Переобозначить все элементы расширенной матрицы $(A \mid b)$ через $a_{ij}^{(0)}, i = 1, \ldots, n;\ j = 1, \ldots, n + 1$.

б) решить систему через схему единственного деления. Выбрать в качестве ведущего элемента $a_{kk}^{(k-1)} \neq 0$.

2. Обратный ход. Составить систему $\tilde{A}x = \tilde{b}$ и решить ее, начиная с последнего уравнения.

Метод Гаусса с выбором главного элемента [6]

Заметим, что в методе последовательного исключения Гаусса вычисления возможны, если ведущие элементы системы $a_{kk}^{(k\text{-}1)} \neq 0$. Добиться выполнения этого условия можно, переставляя элементы строк и столбцов матрицы. Но среди ведущих элементов могут оказаться очень маленькие по абсолютной величине. При делении на такие ведущие элементы получается большая погрешность округления (вычислительная погрешность).

Чтобы избежать сильного влияния вычислительной погрешности на решение, применяется метод Гаусса с выбором главного элемента. Изложим основную идею этого метода.

Рассмотрим систему. Запишем расширенную прямоугольную матрицу коэффициентов системы

$$S = \begin{pmatrix} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & \dots & a_{1l}^{(0)} & \dots & a_{1n}^{(0)} & a_{1,n+1}^{(0)} \\ a_{21}^{(0)} & a_{22}^{(0)} & \dots & a_{2l}^{(0)} & \dots & a_{2n}^{(0)} & a_{2,n+1}^{(0)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}^{(0)} & a_{m2}^{(0)} & \dots & a_{ml}^{(0)} & \dots & a_{mn}^{(0)} & a_{m,n+1}^{(0)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}^{(0)} & a_{n2}^{(0)} & \dots & a_{nl}^{(0)} & \dots & a_{nn}^{(0)} & a_{n,n+1}^{(0)} \end{pmatrix}.$$

Среди элементов матрицы $a_{ij}^{(0)} (i, j = \overline{1, n})$ выберем наибольший по модулю, *называемый главным*, элемент. Например, пусть им будет элемент $a_{ml}^{(0)}$. Строка с номером m, его содержащая, называется *главной строкой*.

Далее вычисляем множители $m_i =- \frac{a_{il}^{(0)}}{a_{ml}^{(0)}}$ для всех $i \neq m$.

Затем матрица S преобразуется так: к каждой -й, неглавной строке, прибавим почленно главную строку, умножив её на m_i. В результате получим матрицу, у которой все элементы l-го столбца, за исключением $a_{ml}^{(0)}$, равны 0. Отбрасывая этот столбец и главную строку, получаем новую матрицу S_1 с меньшим на единицу числом строк и столбцов.

Над матрицей S_1 повторяем те же операции, после чего получаем матрицу S_2 и т. д. Эти преобразования продолжаются до тех пор, пока не получится матрица, содержащая одну строку из двух элементов, которая тоже считается главной. Затем объединяем все главные строки, начиная с последней. После некоторой перестановки они образуют треугольную матрицу, эквивалентную исходной. На этом заканчивается прямой ход метода Гаусса с выбором главного элемента.

Далее находим $x_i, i = \overline{1, n}$, решая систему с треугольной матрицей. Это обратный ход.

Контроль правильности вычислений в методе Гаусса с выбором главного элемента осуществляется аналогично ранее описанному в методе последовательного исключения неизвестных.

Метод квадратных корней [5]

При решении систем линейных алгебраических уравнений с симметрическими матрицами можно сократить объем вычислений почти вдвое.

Пусть A – симметрическая квадратная матрица системы $Ax = b$ порядка n. Решим задачу ее представления в виде

$$A = U^T \cdot U, \text{ где } U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \dots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{pmatrix}, \; U^T = \begin{pmatrix} u_{11} & 0 & \dots & 0 \\ u_{12} & u_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{1n} & u_{2n} & \dots & u_{nn} \end{pmatrix}$$

Находя произведение $U^T \cdot U$, составим систему уравнении относительно неизвестных элементов матрицы U:

$$\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \dots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_{11} & 0 & \dots & 0 \\ u_{12} & u_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{1n} & u_{2n} & \dots & u_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Система имеет следующий вид:

$$\begin{cases} u_{11}^2 = a_{11}, u_{11} \cdot u_{12} = a_{12}, \dots, u_{11} \cdot u_{1n} = a_{1n} \\ u_{12}^2 + u_{22}^2 = a_{22}, \dots, u_{12} \cdot u_{1n} + u_{22} \cdot u_{2n} = a_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ u_{1n}^2 + u_{2n}^2 + \dots + u_{nn}^2 = a_{nn} \end{cases}$$

Из первой строки системы находим

$$u_{11} = \sqrt{a_{11}}, u_{1j} = \frac{a_{1j}}{u_{11}} \; j = 2,3, \dots, n.$$

Из второй строки определяем

$$u_{22} = \sqrt{a_{22} - u_{12}^2}, \; u_{2j} = \frac{a_{2j} - u_{12} \cdot u_{1j}}{u_{22}}, j = 2,3, \dots n, \text{и т. д.}$$

Из последней строки имеем

$$u_{nn} = \sqrt{a_{nn} - \sum_{k=1}^{n-1} u_{kn}^2}.$$

Таким образом, элементы матрицы U находятся из соотношений

$$u_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{n-1} u_{ki}^2}, i = 1,2, \dots, n;$$

$$u_{ij} = \frac{1}{u_{ii}} \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} u_{ki} \cdot u_{kj} \right), j = 2,3, \dots, n; \; j > i; \; u_{ij} = 0 \; (j < i). \qquad (4)$$

При осуществлении $U^T U$ – разложения симметрической матрицы могут возникать ситуации, когда $u_{ii} = 0$ при некотором i или подкоренное выражение отрицательно. Для симметрических положительно определенных матриц разложение выполнимо.

Если матрица A представима в форме $U^T U$, то система $Ax = b$ имеет вид $U^T U x = b$. Решение этой системы сводится к последовательному решению двух систем с треугольными матрицами. В итоге процедура решения состоит их двух этапов.

1. Прямой ход. Произведение Ux обозначается через y. В результате решения системы $U^T \cdot y = b$ находится столбец y.

2. Обратный ход. В результате решения системы $Ux = y$ находится решение задачи – столбец x.

Алгоритм метода квадратных корней:

1. Представить матрицу A в форме $A = U^T \cdot U$, используя (4).

2. Составить систему уравнений $U^T \cdot y = b$ и найти y.

3. Составить систему уравнений $U \cdot x = y$ и найти x.

Метод Халецкого [4]

Пусть система уравнений задается в виде:

$$Ax = b, \tag{5}$$

где A – квадратная матрица $n \times n$. Представим матрицу A в виде произведения нижней треугольной матрицы B и верхней треугольной матрицы C с единичной диагональю.

$$A = BC$$

Тогда система (5) может быть представлена в виде двух систем с треугольными матрицами:

$$By = b; Cx = y \tag{6}$$

Системы (6) решаются через формулы:

$$y_1 = \frac{b_1}{b_{11}}, y_i = \frac{1}{b_{ii}}\left(b_i - \sum_{k=1}^{i\text{-}1} b_{ik} y_k\right), i = 2,3, \dots, n$$

$$x_n = y_n, x_i = y_i - \sum_{k=i+1}^{n} c_{ik} x_k, i = n-1, n-2, n-2, \dots, 1$$

Элементы b_{ij} и c_{ij} определяются по следующим формулам:

$$\begin{cases} b_{i1} = a_{i1}, b_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{j\text{-}1} b_{ik} c_{kj}, (i \geq j > 1) \\ c_{1j} = \dfrac{a_{1j}}{b_{11}}, c_{ij} = \dfrac{1}{b_{ii}} \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{i\text{-}1} b_{ik} c_{kj} \right), (1 < i < j) \end{cases}$$

Алгоритм метода LU-разложение:

1. Выполнить операцию факторизации исходной матрицы A, применяя схемы или формулы, и получить матрицы L и U.

2. Решить систему $L \cdot y = b$.

3. Решить систему $U \cdot x = b$.

Метод простых итерации [3; 5]

Альтернативой прямым методам решения СЛАУ являются итерационные методы, основанные на многократном уточнении $x^{(0)}$, заданного приближенного решения системы $A \cdot x = b$. Верхним индексом в скобках здесь и далее по тексту обозначается номер итерации (совокупности повторяющихся действий).

Реализация простейшего итерационного метода – метода простых итераций – состоит в выполнении следующих процедур.

1. Исходная задача $A \cdot x = b$ преобразуется к равносильному виду:

$$x = \alpha \cdot x + \beta,$$

где α – квадратная матрица порядка n; β- столбец. Это преобразование может быть выполнено различными путями, но для обеспечения сходимости итераций нужно добиться выполнения условия $|\alpha| < 1$.

2. Столбец β принимается в качестве начального приближения $x^{(0)} = \beta$ и далее многократно выполняются действия по уточнению решения, согласно рекуррентному соотношению

$$x^{(k+1)} = \alpha \cdot x^{(k)} + \beta, k = 0,1,2, \ldots$$

или в развернутом виде

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = a_{11} \cdot x_1^{(k)} + a_{12} \cdot x_2^{(k)} + \ldots + a_{1n} \cdot x_n^{(k)} + \beta_1, \\ x_2^{(k+1)} = a_{21} \cdot x_1^{(k)} + a_{22} \cdot x_2^{(k)} + \ldots + a_{2n} \cdot x_n^{(k)} + \beta_2, \\ \vdots \\ x_n^{(k+1)} = a_{n1} \cdot x_1^{(k)} + a_{n2} \cdot x_2^{(k)} + \ldots + a_{nn} \cdot x_n^{(k)} + \beta_n. \end{cases}$$

3. Итерации прерываются при выполнении условия (где $\varepsilon > 0$ – заданная точность, которую необходимо достигнуть при решении задачи)

$$\left|x^{(k+1)} - x^{(k)}\right| < \varepsilon.$$

Алгоритм метода простых итераций

1. Преобразовать систему $Ax = b$ к виду $x = \alpha x + \beta$ одним из описанных способов.

2. Задать начальное приближение решения $x^{(0)}$ произвольно или положить $x^{(0)} = \beta$, а также малое положительное число ε (точность). Положить $k = 0$.

3. Вычислить следующее приближение $x^{(k+1)}$ по формуле $x^{(k+1)} = \alpha x^{(k)} + \beta$.

4. Если выполнено условие $\left|x^{(k+1)} - x^{(k)}\right| < \varepsilon$, процесс завершить и в качестве приближенного решения задачи принять $x_* \cong x^{(k+1)}$. Иначе положить $k = k + 1$ и перейти к пункту 3 алгоритма.

Метод Зейделя [3; 5]

Этот метод является модификацией метода простых итераций и в некоторых случаях приводит к более быстрой сходимости.

Итерации по методу Зейделя отличаются от простых итераций тем, что при нахождении i-й компоненты $(k + 1)$-го приближения сразу используются уже найденные компоненты $(к + 1)$-го приближения с меньшими номерами $1,2, \ldots, i$-1.

При рассмотрении развернутой формы системы итерационный процесс записывается в виде

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = a_{11} \cdot x_1^{(k)} + a_{12} \cdot x_2^{(k)} + a_{13} \cdot x_3^{(k)} + \ldots + a_{1n} \cdot x_n^{(k)} + \beta_1, \\ x_2^{(k+1)} = a_{21} \cdot \boxed{x_1^{(k+1)}} + a_{22} \cdot x_2^{(k)} + a_{23} \cdot x_3^{(k)} + \cdots + a_{2n} \cdot x_n^{(k)} + \beta_2, \\ x_3^{(k+1)} = a_{31} \cdot \boxed{x_1^{(k+1)}} + a_{32} \cdot \boxed{x_2^{(k+1)}} + a_{33} \cdot x_3^{(k)} + \cdots + a_{3n} \cdot x_n^{(k)} + \beta_3, \\ \vdots \\ x_n^{(k+1)} = a_{n1} \cdot \boxed{x_1^{(k+1)}} + a_{n2} \cdot \boxed{x_2^{(k+1)}} + + a_{nn\text{-}1} \cdot \boxed{x_{n\text{-}1}^{(k+1)}} + a_{nn} \cdot x_n^{(k)} + \beta_n. \end{cases}$$

В каждое последующее уравнение подставляются значения неизвестных, полученных из предыдущих уравнений.

Алгоритм метода Зейделя

1. Преобразовать систему $Ax = b$ к виду $x = \alpha x + \beta$ одним из описанных способов.

2. Задать начальное приближение решения $x^{(0)}$ произвольно или положить $x^{(0)} = \beta$, а также малое положительное число ε (точность). Положить $k = 0$.

3. Произвести расчеты по формулам найти $x^{(k+1)}$.

4. Если выполнено условие $\left|x^{(k+1)} - x^{(k)}\right| < \varepsilon$, процесс завершить и в качестве приближенного решения задачи принять $x_* \cong x^{(k+1)}$. Иначе положить $k = k + 1$ и перейти к пункту 3 алгоритма.

Преимущества и недостатки методов СЛАУ [1; 2; 7]

На основе наших вычислений (см. приложение 3) и всех описанных выше методов, мы подвели преимущества и недостатки каждого из методов, а также составили общую таблицу для прямых и итерационных методов.

Таблица 1

Метод	Преимущества	Недостатки
Метод Гаусса	1. Прост и понятен. 2. Легок в программировании.	1. Ведущие элементы должны быть отличны от нуля. 2. Неустойчив для плохо обусловленных матриц.

		(т.к. при погрешности данных наблюдается сильное отклонение в результатах (3).
Метод квадратного корня	1. Быстрее сходится за счет симметрии матрицы. 2. Устойчив к ошибкам, т.к. требует меньше арифметических операций. (Сокращает вычисления за счет симметрии матрицы).	1. Возможно получение комплексных чисел. (т.к. присутствует операция извлечения корня).
Метод Зейделя	1. Сходится при любых коэффициентах. 2. Самоисправляющийся. (Так как ошибочное приближение можно рассматривать, как новое начальное). 3. В некоторых случаях более быстрая сходимость в отличии от метода простых итераций. (т.к. при итерировании учитываются результаты решения предыдущих уравнений).	1. Долго сходится если коэффициенты разного порядка. 2. Необходимо предварительное корректирование системы.
Метод Холецкого	1. Сокращает вычисления за счет симметрии матриц. 2. Легок в программировании. 3. Экономичность использования памяти ЭВМ (т.к. после решения одной из матриц, её в место в памяти может занять другая, что невозможно в методе Гаусса).	1. Долго сходится если коэффициенты разного порядка. 2. Может быть использован только для симметричных матриц
Метод простых итераций	1. Сходится при любых коэффициентах. 2. Самоисправляющийся. (см. Метод Зейделя).	1. Долго сходится если коэффициенты разного порядка. 2. Необходимо предварительное привидение системы к виду, в котором элементы главной диагонали превосходили бы остальные элементы строк,

		путем арифметических операций.
Метод Гаусса с выбором главного элемента	1. Не теряет эффективности при коэффициентах разных порядков. 2. При выборе главного элемента в данном методе, увеличивается сходимость.	1. Неустойчив для плохо обусловленных матриц.

Все методы решения СЛАУ делятся на две группы – точные (прямые) и итерационные. *Точные методы* позволяют получить решение системы линейных уравнений за конечное число арифметических операций (*метод Гаусса*, *метод квадратного корня* и т. д.). Использование итерационных методов дает возможность найти приближенное решение системы с заданной степенью точности (*метод простой итерации, метод Зейделя*).

Разреженная матрица – это матрица с преимущественно нулевыми элементами.

Среди специалистов нет единства в определении того, какое именно количество ненулевых элементов делает матрицу разреженной. Разные авторы предлагают различные варианты. Для матрицы порядка n число ненулевых элементов:

– есть O(n). Такое определение подходит разве что для теоретического анализа асимптотических свойств матричных алгоритмов;

– в каждой строке не превышает 10 в типичном случае;

– ограничено $n^{1+\gamma}$, где $\gamma < 1$.

– таково, что для данного алгоритма и вычислительной системы имеет смысл извлекать выгоду из наличия в ней нулей.

Таблица 2

Критерий сравнения	*Точные методы*	*Итерационные методы*
Область применения метода	1. Неэффективны при решении матриц большой размерности из-за выполнения чрезмерного числа арифметических операций. 2. Приводят к потере свойства разреженности в разряженных матрицах. 3. Область применения зависит от свойства сходимости.	1. Область применения зависит от свойства сходимости. 2. Эффективны при решении разряженных матриц и матриц большой размерности (большая размерность это N>1000).
Временные затраты	1. Приводит к необходимости затраты большого количества времени при решении системы из-за кубической зависимость числа арифметических операций от размера матрицы (см. приложение 1).	1. Экономичны, в плане затраты машинного времени и использования оперативной памяти т. к. время решения, пропорционально квадрату размера матрицы (см. приложение 2).
Погрешность результата	1. Погрешность метода зависит от системы (плохая обусловленность – большая погрешность, хорошая обусловленность – маленькая погрешность (3)).	1. Позволяют получить решение с любой заданной точностью.

Алгоритм выбора метода [7]

На основе выделенных особенностей прямых и точных методов СЛАУ разработаем алгоритм выбора метода решения для системы линейных алгебраических уравнений (рис. 2).

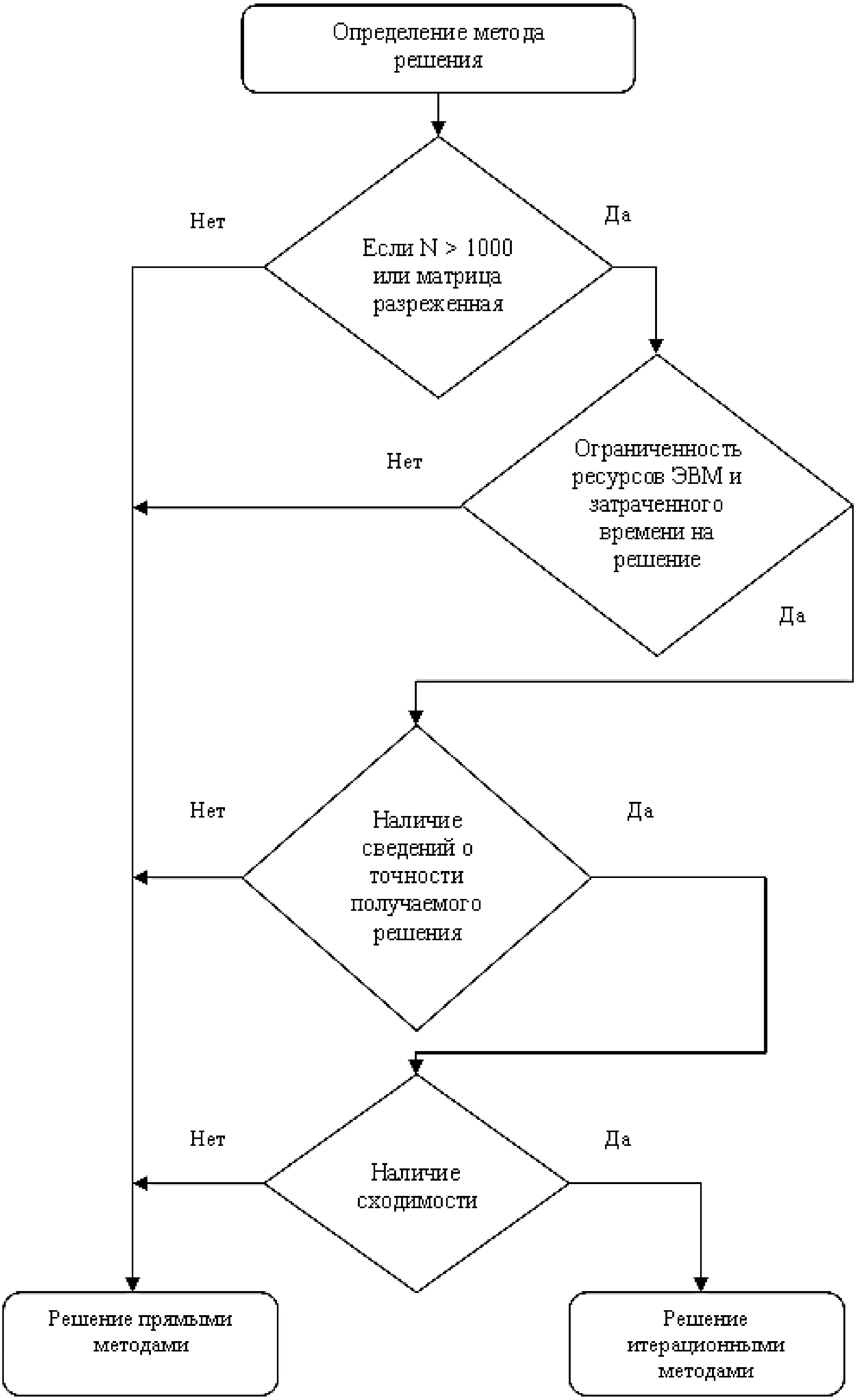

Рис. 2. Блок-схема алгоритма выбор метода решения СЛАУ

Приложение 1

Лемма 1. Выполняются равенства

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}, \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Подсчитаем число выполняемых арифметических действий при решении системы порядка n без учета операций контроля. При исключении неизвестной x_1 осуществляются следующие действия:

а) производится всего n делений второго и следующих коэффициентов первого уравнения и его правой части на коэффициент при x_1;

б) расходуется по n умножений и n вычитаний при исключении x_1 из второго и последующих уравнений, число которых равно $n-1$.

Таким образом, общее число арифметических действий, затрачиваемых на исключение x_1, есть

$$Q_1 = n + 2n(n-1) = 2n^2 - n.$$

При исключении x_2 производятся совершенно аналогичные вычисления, как и при исключении x_1. Разница состоит лишь в том, что осуществляются действия над строками матрицы, размеры которой в каждом направлении на единицу меньше. Поэтому число выполняемых арифметических действий Q_2 при исключении x_2 получается заменой n на n-1:

$$Q_2 = 2(n-1)^2 - (n-1) = 2(n-2+1)^2 - (n-2+1).$$

Вообще при исключении неизвестной x_i выполняются Q_i арифметических действий:

$$Q_i = 2(n-i+1)^2 - (n-i+1).$$

Всего в прямом ходе затрачивается число арифметических действий, равное

$$Q_* = \sum_{i=1}^{n} Q_i = \sum_{i=1}^{n} [2(n-i+1)^2 - (n-i+1)].$$

Отсюда, пологая $k = n\text{-}i + 1$ и опираясь и опираясь на лемму 1, находим явное выражение для Q_*:

$$Q_* = \sum_{k=n}^{1}(2k^2 - k) = \sum_{k=1}^{n}(2k^2 - k) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{3} - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{2}{3}n^3 + \frac{n^2}{2} - \frac{n}{6}.$$

В обратном ходе число умножений и вычитаний, вместе взятых, равно удвоенному числу элементов квадратной матрицы порядка n, расположенных под главной диагональю, и, как показывают простые подсчеты, составляет

$$Q^* = n(n-1) = n^2 - n.$$

Итак, число арифметических действий, выполняемых при решении системы линейных алгебраических уравнений порядка n методом Гаусса, в общем случае равно

$$Q = Q_* + Q^* = \frac{2}{3}n^3 + \frac{3}{2}n^2 - \frac{7}{6}n \approx \frac{2}{3}n^3.$$

В методе квадратного корня количество арифметических операций сокращается примерно в 2 раза из-за симметричной матрицы равно $\approx \frac{1}{3}n^3$

Приложение 2

Использование эффективных итерационных методов снижает вычислительную сложность до $O(N_{iter}N^2)$, где $N_{iter} \ll N$ – количество итераций и $O(N^2)$ – сложность одного умножения матрицы на вектор. Таким образом, для больших N решение СЛАУ происходит не так быстро, поскольку время вычислений возрастает пропорционально квадрату N.

Ниже приведен график зависимости времени решения от размерности матрицы при использовании прямого и итерационного метода.

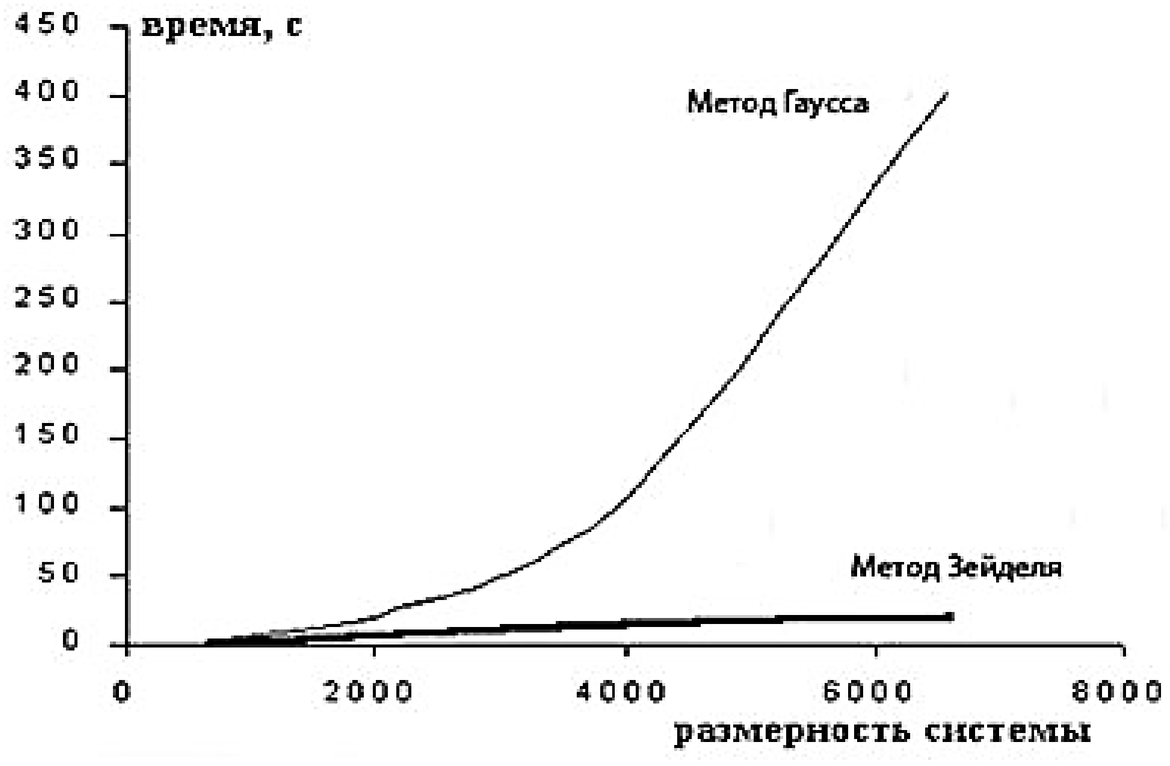

Рис. 3

Приложение 3

Задание №1

Используя схему Гаусса, рушить систему уравнений с точностью до 0,001

$$\begin{cases} 3{,}14x_1 - 2{,}12x_2 + 1{,}17x_3 = 1{,}27 \\ -2{,}12x_1 + 1{,}32x_2 - 2{,}45x_3 = 2{,}13 \\ 1{,}17x_1 - 2{,}45x_2 + 1{,}18x_3 = 3{,}14 \end{cases}$$

Таблица 3

Коэффициенты при неизвестных			Свободные члены	Контрольные суммы	Строчные суммы
X1	X2	X3			
3,14	–2,12	1,17	1,27	3,46	3,46
–2,12	1,32	–2,45	2,13	–1,12	–1,12
1,17	–2,45	1,18	3,14	3,04	3,04
1	–0,6752	0,3726	0,4045	1,1019	1,1019
	–0,1114	–1,6601	2,9875	1,2160	1,2160
	–1,6601	0,7441	2,6667	1,7508	1,7508
	1	14,9022	–26,8178	–10,9156	–10,9156
		25,4832	–41,8535	–16,3702	–16,3702
		1	–1,6424	–0,6423	–0,6423

–0,5651	–2,3426	–1,6424			
0,4349	–1,3426	–0,6424			

$X_1 = –0.5651 \quad X_2 = –2.3426 \quad X_3 = –1.6424$

Задание №2

Решить систему линейных уравнений методом главных элементов с точностью до 0,001

$$\begin{cases} 3{,}14x_1\text{-}2{,}12x_2 + 1{,}17x_3 = 1{,}27 \\ -2{,}12x_1 + 1{,}32x_2 - 2{,}45x_3 = 2{,}13 \\ 1{,}17x_1\text{-}2{,}45x_2 + 1{,}18x_3 = 3{,}14 \end{cases}$$

Таблица 4

m_i	Коэффициенты при неизвестных			Свободные члены	Σ	Σ’
	X1	X2	X3			
–1 0,6752 –0,3726	$\boxed{3{,}14}$ –2,12 1,17	–2,12 1,32 –2,45	1,17 –2,45 1,18	1,27 2,13 3,14	3,46 –1,12 3,04	3,46 –1,12 3,04
–1 –14,9022	– –	$\boxed{–0{,}1114}$ –1,6601	–1,6600 0,7441	2,9875 2,6668	1,2162 1,7508	1,2162 1,7508
–	–	–	$\boxed{25{,}4818}$	–41,8535	19,8749	19,8749
	–0,5661	–2,3439	–1,6424			
	0,4339	–1,3439	–0,6424			

$X_1 = –0.5661 \quad X_2 = –2.3439 \quad X_3 = –1.6424$

Задание №3

Решить систему линейных уравнений методом квадратных корней с точностью до 0,001

$$\begin{cases} 3{,}14x_1\text{-}2{,}12x_2 + 1{,}17x_3 = 1{,}27 \\ -2{,}12x_1 + 1{,}32x_2 - 2{,}45x_3 = 2{,}13 \\ 1{,}17x_1\text{-}2{,}45x_2 + 1{,}18x_3 = 3{,}14 \end{cases}$$

Таблица 5

Коэффициенты при неизвестных			Свободные члены	Σ	Σ’
X1	X2	X3			
3,14 –2,12 1,17	–2,12 1,32 –2,45	1,17 –2,45 1,18	1,27 2,13 3,14	3,46 –1,12 3,04	3,46 –1,12 3,04

<table>
<tr><td>1,7720</td><td>–1,1964
0,3337i</td><td>0,6603
4,9761i
5,0503</td><td>0,7167
–8,9525i
–8,2929</td><td>1,9926
–3,7877i
–3,8801</td><td>1,9926
–3,7877i
–3,8801</td></tr>
<tr><td>–0,5644</td><td>–2,3412</td><td>–1,6421</td><td rowspan="2"></td><td rowspan="2"></td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>0,4356</td><td>–1,3412</td><td>–0,6421</td></tr>
</table>

$X_1 = –0.5644 \quad X_2 = –2.3412 \quad X_3 = –1.6421$

Задание №*4*

Решить систему уравнений по схеме Халецкого с точностью до 0,0001

$$\begin{cases} 3{,}14x_1\text{-}2{,}12x_2 + 1{,}17x_3 = 1{,}27 \\ -2{,}12x_1 + 1{,}32x_2 - 2{,}45x_3 = 2{,}13 \\ 1{,}17x_1\text{-}2{,}45x_2 + 1{,}18x_3 = 3{,}14 \end{cases}$$

Таблица 6

<table>
<tr><td colspan="6">Коэффициенты при неизвестных</td><td rowspan="2">Свободный член</td><td rowspan="2">Σ</td></tr>
<tr><td colspan="2">X1</td><td colspan="2">X2</td><td colspan="2">X3</td></tr>
<tr><td colspan="2">3,14
–2,12
1,17</td><td colspan="2">–2,12
1,32
–2,45</td><td colspan="2">1,17
–2,45
1,18</td><td>1,27
2,13
3,14</td><td>3,46
–1,12
3,04</td></tr>
<tr><td>3,14</td><td>1</td><td colspan="2">–0,67516</td><td colspan="2" rowspan="2">0,37261
14,90989</td><td rowspan="3">0,40446
–26,83182
–1,64248</td><td rowspan="3">1,10191
–10,92194
–0,64248</td></tr>
<tr><td colspan="2" rowspan="2">–2,12
1,17</td><td>–0,11134</td><td>1</td></tr>
<tr><td colspan="2">–1,66006</td><td>25,49536</td><td>1</td></tr>
<tr><td colspan="2">1</td><td colspan="2">1</td><td colspan="2">1</td><td>–1,64248
–2,34262
–0,56518</td><td>–0,64248
–1,34262
0,43481</td></tr>
</table>

$X_1 = –0.5652 \quad X_2 = –2.3426 \quad X_3 = –1.6424$

Задание №*5*

Методом итераций решить систему линейных уравнений с точностью до 0,001, предварительно оценив число необходимых для этого шагов

$$\begin{cases} 3{,}14x_1\text{-}2{,}12x_2 + 1{,}17x_3 = 1{,}27 \ (I) \\ -2{,}12x_1 + 1{,}32x_2 - 2{,}45x_3 = 2{,}13 \ (II) \\ 1{,}17x_1 - 2{,}45x_2 + 1{,}18x_3 = 3{,}14 \ (III) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3{,}14x_1 - 2{,}12x_2 + 1{,}17x_3 = 1{,}27 \ (I) \\ 1{,}17x_1 - 2{,}45x_2 + 1{,}18x_3 = 3{,}14 \ (III) \\ -2{,}12x_1 + 1{,}32x_2 - 2{,}45x_3 = 2{,}13 \ (II) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 7{,}23x_1\text{-}3{,}11x_2 + 3{,}61x_3 = \text{-}2{,}73\ (2I - II - III) \\ -0{,}8x_1 - 2{,}78x_2 + 1{,}19x_3 = 5{,}01\ (2III - I) \\ -1{,}1x_1 + 0{,}52x_2 - 3{,}73x_3 = 5{,}53\ (2II + I) \end{cases}$$

Преобразуем систему $Ax = b$ к виду $x = \alpha x + \beta$.

$$\begin{cases} x_1 = -0{,}378 - 0{,}430x_2 + 0{,}499x_3 \\ x_2 = -1{,}802 + 0{,}288x_1 - 0{,}428x_3 \\ x_3 = -1{,}483 + 0{,}295x_1 - 0{,}139x_2 \end{cases}$$

Покажем вычисления на примере нескольких итераций.

K=1

$$\begin{cases} x_1 = -0{,}378 - 0 * (-0{,}430) - 0 * 0{,}499 = -0{,}378 \\ x_2 = -1{,}802 - 0 * 0{,}288 - 0 * (-0{,}428) = -1{,}802 \\ x_3 = -1{,}483 - 0 * 0{,}295 - 0 * (-0{,}139) = -1{,}483 \end{cases}$$

K=2

$$\begin{cases} x_1 = -0{,}378 - (-1{,}802) * (-0{,}430) - (-1{,}483) * 0{,}499 = -0{,}413 \\ x_2 = -1{,}802 - (-0{,}378) * 0{,}288 - (-1{,}483) * (-0{,}428) = -2{,}328 \\ x_3 = -1{,}483 - (-0{,}378) * 0{,}295 - (-1{,}802) * (-0{,}139) = -1{,}622 \end{cases}$$

K=3

$$\begin{cases} x_1 = -0{,}378 - (-2{,}328) * (-0{,}430) - (-1{,}622) * 0{,}499 = -0{,}413 \\ x_2 = -1{,}802 - (-0{,}413) * 0{,}288 - (-1{,}622) * (-0{,}428) = -2{,}328 \\ x_3 = -1{,}483 - (-0{,}413) * 0{,}295 - (-2{,}328) * (-0{,}139) = -1{,}622 \end{cases}$$

Остальные расчеты сведем в таблицу 7.

Таблица 7

K	X1	X2	X3
0	0	0	0
1	–3,7759	–1,80216	–1,48257
2	–0,41253	–2,32813	–1,62246
3	–0,56893	–2,37795	–1,68548
4	–0,5589	–2,35992	–1,6463
5	–0,5707	–2,34604	–1,64675
6	–0,56451	–2,34283	–1,64133
7	–0,56584	–2,34229	–1,64271
8	–0,56492	–2,3425	–1,64224
9	–0,56524	–2,34257	–1,64255

10	–0,56512	–2,3426	–1,64246
11	–0,56518	–2,3426	–1,6425
12	–0,56515	–2,3426	–1,64248
13	–0,56516	–2,3426	–1,64249
14	–0,56516	–2,3426	–1,64249

Сходимость в тысячных долях имеет место уже на 13-м шаге.

$$X_1 = -0.5652 \quad X_2 = -2.3426 \quad X_3 = -1.6425$$

Задание №6

Методом Зейделя решить с точностью 0,001 систему линейных уравнений, приведя её к виду, удобному для итераций

$$\begin{cases} 3{,}14x_1 - 2{,}12x_2 + 1{,}17x_3 = 1{,}27 \\ -2{,}12x_1 + 1{,}32x_2 - 2{,}45x_3 = 2{,}13 \\ 1{,}17x_1 - 2{,}45x_2 + 1{,}18x_3 = 3{,}14 \end{cases}$$

Прежде чем применять метод, необходимо переставить строки исходной системы таким образом, чтобы на диагонали стояли наибольшие по модулю коэффициенты матрицы.

$$\begin{cases} 3{,}14x_1 - 2{,}12x_2 + 1{,}17x_3 = 1{,}27 \\ 1{,}17x_1 - 2{,}45x_2 + 1{,}18x_3 = 3{,}14 \\ -2{,}12x_1 + 1{,}32x_2 - 2{,}45x_3 = 2{,}13 \end{cases}$$

Преобразуем систему $Ax = b$ к виду $x = \alpha x + \beta$.

$$\begin{cases} x_1 = 0{,}404 - 0{,}675x_2 + 0{,}373x_3 \\ x_2 = -1{,}282 - 0{,}478x_1 - 0{,}482x_3 \\ x_3 = -0{,}869 + 0{,}865x_1 - 0{,}539x_2 \end{cases}$$

Покажем вычисления на примере нескольких итераций.

K=1

$$\begin{cases} x_1 = 0{,}404 - 0 * (-0{,}675) - 0 * 0{,}373 = 0{,}404 \\ x_2 = -1{,}282 - 0{,}404 * (-0{,}478) - 0 * (-0{,}482) = -1{,}088 \\ x_3 = -0{,}869 - 0{,}404 * 0{,}865 - (-1{,}088) * (-0{,}539) = -1{,}806 \end{cases}$$

K=2

$$\begin{cases} x_1 = 0{,}404 - (-1{,}088) * (-0{,}675) - (-1{,}806) * 0{,}373 = 0{,}342 \\ x_2 = -1{,}282 - 0{,}342 * (-0{,}478) - (-1{,}806) * (-0{,}482) = -1{,}988 \\ x_3 = -0{,}869 - 0{,}342 * 0{,}865 - (-1{,}988) * (-0{,}539) = -2{,}237 \end{cases}$$

K=3

$$\begin{cases} x_1 = 0{,}404-(-1{,}988)*(-0{,}675)-(-2{,}237)*0{,}373 =-0{,}104 \\ x_2 =-1{,}282-(-0{,}104)*(-0{,}478)-(-2{,}237)*(-0{,}482) =-2{,}409 \\ x_3 =-0{,}869-(-0{,}104)*0{,}865-(-2{,}409)*(-0{,}539) =-2{,}077 \end{cases}$$

Остальные расчеты сведем в таблицу 8.

Таблица 8

K	X1	X2	X3
0	0	0	0
1	0,40446	–1,08848	–1,80582
2	0,34243	–1,98785	–2,23669
3	–0,10424	–2,40868	–2,07693
4	–0,44789	–2,49584	–1,82652
5	–0,60001	–2,4479	–1,66903
6	–0,62636	–2,38461	–1,61216
7	–0,60482	–2,34694	–1,6105
8	–0,56001	–2,33429	–1,62516
9	–0,566	–2,33466	–1,63748
10	–0,56166	–2,33852	–1,64331
11	–0,5621	–2,34154	–1,64456
12	–0,56367	–2,34289	–1,64393
13	–0,56482	–2,34313	–1,64307
14	–0,5653	–2,34295	–1,64255
15	–0,56537	–2,34273	–1,64238
16	–0,56529	–2,34261	–1,64238
17	–0,56521	–2,34257	–1,64243
18	–0,56516	–2,34257	–1,64247
19	–0,56515	–2,34259	–1,64249
20	–0,56515	–2,3426	–1,64249
21	–0,56516	–2,3426	–1,64249
22	–0,56516	–2,3426	–1,64249

Сходимость в тысячных долях имеет место только на 22-м шаге.

$X_1 = –0.5652$ $X_2 = –2.3426$ $X_3 = –1.6425$

Список литературы

1. Разреженная матрица // Википедия [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A0%D0%B0%D0%B7%D1%80%D0%B5%D0%B6%D0%B5%D0%BD%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%D0%BC%D0%B0%D1%82%D1%80%D0%B8%D1%86%D0%B0 (дата обращения: 22.09.2015).

2. Волков Е.А. Численные методы / Е.А. Волков. – СПб.: Лань, 2008.

3. Краскевич В.Е. Численные методы в инженерных исследованиях / В.Е. Краскевич, К.Х. Зеленский, В.И. Гречко. – Киев: Вища школа, 1986.

4. Мат семестр: Решение СЛАУ методом LU-разложения [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://math.semestr.ru/optim/decomposition.php (дата обращения: 20.09.2015).

5. Математический форму Math Help Planet: Численные методы решения СЛАУ [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://mathhelpplanet.com/static.php?p=chislennyye-metody-resheniya-slau (дата обращения: 18.09.2015).

6. Олд-Мат [Электронный ресурс]: метод Гаусса с выбором главного элемента [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://old.math.tsu.ru/EEResources/cm/text/4_5.htm (дата обращения: 19.09.2015).

7. Энтропия-блог: сравнительный анализ прямых и итерационных методов решения систем линейных алгебраических уравнений [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://entropiya-blog.ru/sravnitelnyj-analiz-pryamyx-i-iteracionnyx-metodov-resheniya-sistem-linejnyx-algebraicheskix-uravnenij.html (дата обращения: 19.09.2015).

Кротова Елена Львовна – канд. физ.-мат. наук, доцент ФГБОУ ВПО «Пермский национальный исследовательский политехнический университет», Россия, Пермь.

Цылова Елена Григорьевна – канд. физ.-мат. наук, доцент ФГБОУ ВПО «Пермский национальный исследовательский политехнический университет», Россия, Пермь.

Осипов Никита Романович – студент ФГБОУ ВПО «Пермский национальный исследовательский политехнический университет», Россия, Пермь.

Филиппов Михаил Александрович – ФГБОУ ВПО «Пермский национальный исследовательский политехнический университет», Россия, Пермь.