ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ

Осипова Екатерина Владимировна

студентка

Орешина Мария Николаевна

канд. физ.-мат. наук, доцент

ФГБОУ ВПО «Липецкий государственный технический университет»

г. Липецк, Липецкая область

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА СБАЛАНСИРОВАННОГО УСЕЧЕНИЯ ДЛЯ РАСЧЕТА ЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Аннотация: *в данной статье авторами обсуждаются особенности применения метода сбалансированного усечения для построения приближенного решения линейной динамической системы большой размерности. Приводятся результаты численного эксперимента.*

Ключевые слова: *понижение порядка модели, линейные динамические системы, сбалансированное усечение, сингулярные значения.*

Теоретические основы метода

Рассматривается линейная динамическая система Σ порядка *n*:

$$\Sigma:\begin{cases}\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t)\\ y(t)=Cx(t)\end{cases}\Leftrightarrow\Sigma=\begin{pmatrix}A & B\\ C & \end{pmatrix}\in R^{(n+p)\times(n+m)}$$

(1)

где $x(t)\in R^n$; $u(t)\in R^m$, $y(t)\in R^p$ – векторы фазовых координат, управляющих и регулируемых величин соответственно; $A\in R^{n\times n}, B\in R^{n\times m}, C\in R^{p\times n}$ – матрицы постоянных коэффициентов.

Расчет систем такого вида актуален для задач теории управления и многих других приложений. При этом часто возникает ситуация, когда система имеет большую размерность, поэтому ее решение приходится искать приближенно [3, 4]. В работе для построения приближенного решения используется метод сбалансированного усечения [3], позволяющий заменить исходную систему системой того же вида, но меньшей размерности, без существенного изменения ее основных характеристик.

Пусть система (1) является полностью управляемой и полностью наблюдаемой с асимптотической устойчивостью. Тогда грамианы управляемости и наблюдаемости удовлетворяют следующим уравнениям:

$$AP + PA^{*} + BB^{*} = 0, \quad A^{*}Q + QA + C^{*}C = 0$$

Систему называют сбалансированной, если грамианы управляемости P и наблюдаемости Q равны и диагональны:

$$P = Q = \Sigma = diag(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$$

где $\sigma_1 \geq, \ldots, \geq \sigma_n > 0$ – сингулярные значения [1, 2].

Таким образом, всегда существует такое линейное преобразование T, что эквивалентно преобразует систему (1) в сбалансированную. Тогда преобразованные грамианы управляемости и наблюдаемости задаются формулами $\tilde{P} = TPT^{*}$, $\tilde{Q} = T^{-1*}QT^{-1}$.

Можно считать, что, если какие-то сингулярные значения значительно меньше остальных $\sigma_{k+1} << \sigma_k$, то соответствующие состояния почти не влияют на выход системы, и именно в этом месте выполняется усечение. Таким образом, система (1) заменяется системой порядка k

$$\tilde{\Sigma} : \begin{cases} \dot{\tilde{x}}(t) = \tilde{A}\tilde{x}(t) + \tilde{B}u(t) \\ \tilde{y}(t) = \tilde{C}\tilde{x}(t) \end{cases} \Leftrightarrow \tilde{\Sigma} = \begin{pmatrix} \tilde{A} & \tilde{B} \\ \tilde{C} & \end{pmatrix} \in R^{(k+p)\times(k+m)} \tag{2}$$

где $x(t) \in R^{k}$, $u(t) \in R^{m}$, $y(t) \in R^{p}$, $\tilde{A} = TAT^{-1}, \tilde{C} = CT^{-1}, \tilde{B} = TB$.

Пример

Разработана программа, реализующая метод сбалансированного усечения. Приведем результаты численного эксперимента. Рассмотрим линейную динамическую систему порядка n = 10, для которой

$$B = (-211.667 \quad -16 \quad 251.667 \quad -49.6667 \quad 197.667 \quad 189.333 \quad 87.6667 \quad -88.6667 \quad -38 \quad -72.6667)^T,$$

$$C = (1 \quad -4 \quad 2 \quad -1 \quad -1 \quad -4 \quad 1 \quad -1 \quad -6 \quad -2)$$

$$A = \begin{pmatrix} -980553 & 826854 & -152960 & -1027450 & -697669 & -83854.7 & -1464780 & -437876 & -735021 & -106733 \\ 73130.9 & 61644.4 & -11432.5 & -76632.3 & -51992.8 & -6254.43 & -109176 & -32584.2 & -54754.1 & -7968.57 \\ 1162940 & -980635 & 181424 & 1218590 & 827415 & 99447.4 & 1737230 & 519287 & 871718 & 126586 \\ -228878 & 193000 & -35705.5 & -239827 & -162844 & -19576.5 & -341899 & -102200 & -171568 & -24915.4 \\ 914198 & -770843 & 142669 & 958018 & 650369 & 78155.5 & 1365600 & 408094 & 685162 & 99515.1 \\ 873499 & -736567 & 136274 & 915295 & 621478 & 74698.1 & 1304840 & 390033 & 654749 & 95083 \\ 403876 & -340568 & 63003.5 & 423209 & 287358 & 34538.6 & 603336 & 180353 & 302756 & 43961.3 \\ -410556 & 346205 & -64042.5 & -430233 & -292121 & -35096.2 & -613364 & -183359 & -307776 & -44679.4 \\ -175702 & 148145 & -27425.1 & -184112 & -124983 & -15032.8 & -262419 & -78404.5 & -131677 & -19135.4 \\ -336178 & 283459 & -52465.6 & -352293 & -239156 & -28740.7 & -502167 & -150061 & -251949 & -36595.4 \end{pmatrix}$$

Приведем сингулярные значения системы:

$$31.9996,\ 25, 24, 18, 15,\ 0.899999,\ 0.07,\ 0.0400001,\ 0.025,\ 0.0010001.$$

На рис.1 приведены графики решений исходной системы и системы пониженного порядка (при k=5), полученной в результате расчета методом сбалансированного усечения. Визуально видно, что основные особенности поведения системы приближенное решение успешно отражает.

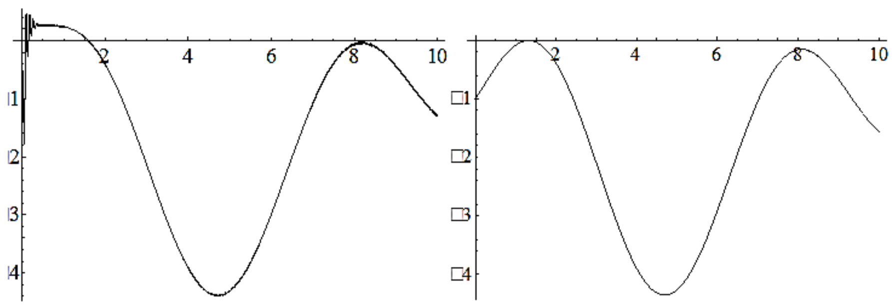

Рис. 1. Графики точного (слева) и приближенного (справа) решений

Список литературы

1. Голуб Дж., Ван Лоун Ч. Матричные вычисления. – М.: Мир, 1999. 548 с.

2. Демель Дж. Вычислительная линейная алгебра. Теория и приложения. – М.: Мир, 2001. – 430 с.

3. Antoulas A.C. Approximation of Large-Scale Dynamical Systems. SIAM: Philadelphia, 2005. 479 p.

4. Kurbatov V.G. Interconnect Macromodelling and Approximation of Matrix Exponent/ V.G. Kurbatov, M.N. Oreshina// Analog Integrated Circuits and Signal Processing. -- 2004. -- Vol. 40, no.1. –pp. 5–19.