

ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ

Гусева Мария Викторовна

студентка

Орешина Мария Николаевна

канд. физ.-мат. наук, доцент

ФГБОУ ВПО «Липецкий государственный

технический университет»

г. Липецк, Липецкая область

**ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ
С ПОМОЩЬЮ ВЕЙВЛЕТ-ПРЕОБРАЗОВАНИЙ**

***Аннотация:** авторами предлагается метод приближенного решения линейных дифференциальных уравнений, основанный на разложении функций в вейвлет-ряд. В результате задача сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов искомой функции.*

***Ключевые слова:** вейвлет-преобразование, линейное дифференциальное уравнение, четырехмерная матрица.*

Многие прикладные задачи приводят к дифференциальным уравнениям, содержащим сингулярные или быстро меняющиеся функции. Решение таких уравнений классическими методами часто приводит [1] к неудовлетворительным результатам из-за возникновения осцилляций. В работе для построения приближенного решения линейных дифференциальных уравнений используется вейвлет-преобразование [2].

Изложим идею предлагаемого метода на примере уравнения первого порядка

$$\dot{x} = \lambda x + f.$$

(1)

Пусть задан материнский вейвлет ψ . Рассмотрим порожденные им базисные функции ψ_{jk}

$$\psi_{jk} = 2^{\frac{-j}{2}} \psi(2^{-j}t - k).$$

Разложение искомой функции $x(t)$ по этому базису имеет вид

$$x(t) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} d_{jk} \psi_{jk}(t) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} d_{jk} 2^{\frac{-j}{2}} \psi(2^{-j}t - k).$$

Очевидно, d_{jk} полностью определяют функцию $x(t)$. Таким образом, задача решения уравнения (1) сводится к нахождению коэффициентов d_{jk} .

Найдем производную функции x

$$\dot{x}(t) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} d_{jk} 2^{\frac{-j}{2}} \dot{\psi}(2^{-j}t - k) 2^{-j}. \quad (2)$$

Разложим функции $\dot{\psi}(2^{-j}t - k)$ по тому же базису

$$\dot{\psi}(2^{-j}t - k) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \tilde{d}_{il} \psi_{il}(t). \quad (3)$$

Здесь коэффициенты $\tilde{d}_{il}$ задаются формулой

$$\tilde{d}_{il} = \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{\psi}(2^{-j}t - k) \psi_{il}(t) dt, \quad (4)$$

где $\psi_{il}(t) = 2^{-i/2} \psi(2^{-i}t - l)$. Подставим (3) в (2), в результате получим

$$\dot{x}(t) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} d_{jk} 2^{\frac{-j}{2}} 2^{-j} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \tilde{d}_{il} \psi_{il}(t).$$

Или с учетом (4), запишем (2) в виде

$$\dot{x}(t) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} d_{jk} 2^{\frac{-j}{2}} 2^{-j} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \dot{\psi}(2^{-j}t - k) 2^{-i/2} \psi(2^{-i}t - l) dt \right] \psi_{il}(t).$$

Введем обозначение

$$c_{ijkl} = 2^{\frac{-j}{2}} \cdot 2^{-j} \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{\psi}(2^{-j}t - k) 2^{-i/2} \psi(2^{-i}t - l) dt, \quad i, j, k, l \in \mathbb{Z}.$$

(5)

Тогда (2) примет вид

$$\dot{x}(t) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} d_{jk} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} c_{ijkl} \psi_{il}(t).$$

Разложим входную функцию f в вейвлет-ряд

$$f = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \gamma_{jk} \psi_{jk}(t) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \gamma_{jk} 2^{\frac{-j}{2}} \psi(2^{-j}t - k).$$

Теперь уравнение (1) можно записать в виде

$$\begin{aligned} & \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} d_{jk} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} c_{ijkl} \psi_{il}(t) - \lambda \left(\sum_{j=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} d_{jk} \psi_{jk}(t) \right) \\ & = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \gamma_{jk} \psi_{jk}(t). \end{aligned}$$

Или

$$\sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} d_{il} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_{ijkl} \psi_{jk}(t) - \lambda \left(\sum_{j=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} d_{jk} \psi_{jk}(t) \right) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \gamma_{jk} \psi_{jk}(t).$$

Поменяем порядок суммирования

$$\sum_{j=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \psi_{jk}(t) \left(\sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} d_{il} c_{ijkl} - \lambda d_{jk} \right) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \gamma_{jk} \psi_{jk}(t).$$

Приравняем коэффициенты при базисных функциях

$$\sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} c_{ijkl} d_{il} - \lambda d_{jk} = \gamma_{jk}.$$

Таким образом, получаем систему линейных алгебраических уравнений относительно d_{jk} . Отметим, что эта система задается бесконечной четырехмерной матрицей. Однако на практике лишь конечное число ее элементов отлично от нуля. Поэтому для ее решения можно успешно применять стандартные методы решения.

Список литературы

1. Короновский А.А., Храмов А.Е. Непрерывный вейвлет-анализ и его приложения. – М.: Физматлит, 2003.
2. Малла С. Вэйвлеты в обработке сигналов. – М.: Мир, 2005.