ЕСТЕСТВЕННЫЕ НАУКИ

Олейников Борис Иванович
канд. техн. наук, доцент
ФГБОУ ВПО «Российский экономический
университет им. Г.В. Плеханова»
Москва

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДОВ ВЕКТОРНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ В ЗАДАЧАХ ОПТИМИЗАЦИИ ПОТРЕБИТЕЛЬСКОГО ВЫБОРА

Аннотация*: в статье рассматриваются методы векторной оптимизации применительно к задачам выбора потребителем определенных благ, показана возможность использования лексикографического метода, методов уступок, метода свертки критериев. В последнем случае возможны линейная, среднеквадратическая, максиминная и минимаксная свертки.*

Ключевые слова*: векторная оптимизация, критерий оптимальности, лексикографический метод, метод уступок, свертка, принимающее решение лицо.*

При оценке качества товаров необходимо учитывать множество его потребительских свойств. Это множество обладает рядом особенностей, которые накладывают существенные ограничения на решение задачи оценки качества:

– разнородность свойств, поскольку они могут описываться или измеряться различными физическими величинами или быть представленными в различных шкалах экспертных оценок;

– различие в степени важности, т.е. свойства имеют различную приоритетность достижимости;

– противоречивость достижимости, т.к. улучшение одного из свойств может повлечь ухудшение других;

– относительная неустойчивость, возникающая вследствие возможных изменений предпочтений потребителя.

Часто (и почти всегда) с учетом особенностей множества свойств товара не существует единственного решения задачи, которое доставляло бы оптимум всем критериям одновременно.

Задачи оптимизации выбора по нескольким критериям являются задачами векторной оптимизации или многокритериальными. В такого рода задачах выделяется некоторое множество решений, называемых эффективными. Выбор решения на этом множестве осуществляется с участием лица, принимающего решения (ЛПР). Под этим термином подразумевается один или несколько руководителей (экспертов), понимающих всю проблему в целом и имеющих полномочия принимать по ней решения.

В работе рассматриваются основные методы решения задач векторной оптимизации, относящиеся к классу задач математического программирования.

Постановка задачи. Пусть задано описание каждого из оптимизируемых критериев в виде соответствующей целевой функции:

$$f_i(x_1, x_2, \ldots x_n), \ \ i = \overline{1,m}.$$

Для удобства будем считать, что каждый из критериев необходимо максимизировать. Тогда задача принимает вид:

$$F(f_1, f_2, \ldots f_m) \to \text{opt}$$

$$\begin{cases} \varphi_1(x_1, x_2, \ldots x_n) \le b_1 \\ \varphi_2(x_1, x_2, \ldots x_n) \le b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi_k(x_1, x_2, \ldots x_n) \le b_k \end{cases}$$

Функция $f_i(x_1, x_2, \ldots x_n), \ i = \overline{1,m}$ – вектор, координатами которого являются значения частных критериев, оптимальное значение которого необходимо найти, а система ограничений задает множество допустимых решений D. Числовое m – мерное пространство R^m, координатами которого являются $f_i(x_1, x_2, \ldots x_n), \ i = \overline{1,m}$ называется критериальным. Если решение $x \in D$, т. е. является допустимым, то соответствующая ему точка в критериальном пространстве является достижимой. Множество таких точек в критериальном пространстве называют множеством достижимости G. Если множество G непустое, то по каждой компоненте вектора F (по каждому критерию $f_i(X)? i = \overline{1,m}$) решение есть, однако точки оптимума по каждому критерию в общем случае не совпадают. Поэтому решением задачи может быть какое-то компромиссное решение, которое может удовлетворять ЛПР по всем компонентам вектора.

Критерий оптимальности. Впервые критерий оптимальности был сформулирован в начале века итальянским экономистом Парето. Этот критерий гласит, что если в процессе товарно-денежных или социальных отношений ни один из участников не ухудшает своего положения, а хотя бы один улучшает, то такой процесс следует считать оптимальным. Критерий оптимальности Парето применяется при решении таких задач, в которых оптимизация означает улучшение одних критериев при условии, чтобы другие не ухудшались. В случае двух критериев f_1 и f_2 множество точек, оптимальных по Парето (Парето-оптимальное множество, Парето-эффективное или просто эффективное множество) может быть изображено на плоскости. Решение задачи называется эффективным или оптимальным по Парето, если не существует другой точки $X^0(x_1^0, x_2^0, \ldots x_n^0) \in D$, для которой $f_i(X^0) \geq f_i(X^*)$ для всех $i = \overline{1,m}$ и строгое равенство выполняется хотя бы для одного из критериев. Множество таких точек называют Парето-оптимальным множеством.

Нормализация критериев. Критерии часто имеют различный физический смысл, измеряются в различных физических величинах и могут иметь несоизмеримые масштабы. Поэтому возникает необходимость нормализации критериев. Требование к нормализации – достижение одинаковой размерности и равных значений критериев в точках оптимума. Самый простой метод нормализации – рассматривать в качестве критериев $\lambda_i = f_i(X) / f_i^{max}$, тогда $max\{\lambda_i\} = 1$.

Методы решения задач векторной оптимизации.

Лексикографический метод. Если ЛПР имеет возможность ранжировать критерии по важности, то предпочтительным будет являться то решение, в котором более важный критерий принимает лучшее значение вне зависимости от того, какие значения при этом будут принимать менее важные критерии.

$$X \in D$$
$$f_1 \to extr$$

Если же множество оптимальных решений для этого первого критерия содержит более одного элемента (решение неединственное), то на этом множестве решается задача оптимизации второго по важности критерия.

$$\begin{cases} X \in D \\ f_1^* = extr f_1 \end{cases}$$
$$f_2 \to extr$$

Если же решение и этой второй задачи неединственное, то на множестве, на котором достигается оптимум второго критерия отыскивается оптимум третьего по важности критерия. Эта процедура продолжается до тех пор, пока не будет получено единственное решение по какому-либо частному критерию, которое и будет решением задачи. Решение, полученное лексикографическим методом, будет Парето-оптимальным в случае единственности и слабо Парето-оптимальным в противном случае.

Метод уступок. Метод уступок относится к интерактивным методам, т.к. в процессе решения задачи ЛПР оценивает приемлемость результатов и вносит изменения в условия задачи с целью улучшения решения. На первом этапе ЛПР ранжирует критерии по важности и затем решается лексикографическая задача (будем по-прежнему считать, что нумерацию критериев ЛПР производит в порядке уменьшения важности). Положим, что задача заключается в максимизации всех критериев. На втором этапе ЛПР анализирует решение. Если значения второго и следующих критериев в полученном решении его не удовлетворяют, он должен дать ответ на вопрос: на какую величину он согласен снизить максимизированное на первом этапе значение более важного критерия, чтобы улучшить значение второго. В итоге формулируется лексикографическая задача:

$$f_2(X) \to max$$
$$\begin{cases} X \in D \\ f_1(x) \ge maxf_1 - \Delta_1 \end{cases}$$

Здесь $maxf_1$ – максимальное значение более важного критерия f_1 , найденное на первом этапе; Δ_1 – величина уступки по первому критерию, которую также называют ценой улучшения второго критерия. На третьем этапе ЛПР вновь анализирует решение и в случае, если по второму критерию решение еще неприемлемо, назначается новое значение уступки Δ_1 и этап 2 повторяется. Если же решение неприемлемо по третьему критерию, ЛПР назначает величину уступки Δ_2 по второму критерию и лексикографическим методом решается задача:

$$f_3(X) \to max$$
$$\begin{cases} X \in D \\ f_1(X) \ge maxf_1 - \Delta_1 \\ f_2(X) \ge maxf_2 - \Delta_2 \end{cases}$$

Так продолжается до тех пор, пока не будет получено решение задачи, удовлетворяющее ЛПР по всем критериям.

Методы решения, основанные на свертывании критериев. Решение задач векторной и многокритериальной оптимизации может быть получено путем свертывания всех частных критериев в один, что приводит к хорошо разработанным методам скалярной однокритериальной оптимизации. Этим объясняется широкое применение сверточных методов.

В качестве формулы для свертывания (свертки) критериев в один критерий применяется обобщенный средний критерий оптимальности:

$$F_p(f_1, f_2, \ldots f_m) = \left[\sum_{i=1}^{m} \alpha_i f_i^{\,p}(X) \right]^{\frac{1}{p}}$$

Здесь: p – целое число; $f_1, f_2, \dots f_m$ – частные критерии, которые должны быть предварительно нормализованы, α_i – весовые коэффициенты, $\alpha_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1$.

Использование метода свертки возможно тогда, когда ЛПР может дать количественную оценку важности критериев путем задания значений коэффициентов α_i. Для задания значений α_i часто используют метод экспертных оценок. Значения α_i задаются в несколько этапов с анализом получаемых результатов и коррекцией значений на каждом из этапов. Поэтому сверточные методы также относят к интерактивным.

Обобщенный критерий при различных значениях параметра p дает различные критерии оптимальности:

при $p=0$ (это можно показать, рассмотрев $\lim_{p \to 0} F_p(X)$) имеем:

$$F_0(X) = \prod_{i=1}^{m} f_i^{\alpha_i}(X)$$

при $p=1$ имеем так называемую линейную свертку:

$$F_1(X) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i f_i(X)$$

при $p=2$ имеем среднеквадратический критерий:

$$F_2(X) = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \alpha_i^2 f_i^2(X)}$$

при $p = -\infty$

$$F(X) = \min_i \alpha_i f_i(X)$$

при $p = \infty$

$$F(X) = \max_i \alpha_i f_i(X)$$

Последние два критерия приводят к максиминным и минимаксным задачам оптимизации. Использование максиминной свертки максимально увеличивает минимальное значение и способствует сближению значений критериев. Минимаксная свертка уменьшает максимальное значение и способствует также сближению критериев.

Сверточный критерий удовлетворяет условиям оптимальности по Парето.

Недостатки метода, основанного на свертывании критериев: решение может быть неустойчивым, т.е. малым приращениям весовых коэффициентов могут соответствовать большие приращения целевых функций; в различных точках множества D соотношение между критериями может быть различным, т.е. весовые коэффициенты α_i могут зависеть от X, в связи с чем могут иметь место зоны нечувствительности значений критерия f_i от весового коэффициента α_i.

Основным достоинством метода является возможность использования широко известного и хорошо разработанного аппарата математического программирования однокритериальных (скалярных) задач оптимизации.

Список литературы

1. Экономико-математические методы и прикладные модели. – М.: Юнити, 1998.

2. Лопатников Л.И. Экономико-математический словарь. – М.: Наука, 1987.

3. Машунин Ю.К. Методы и модели векторной оптимизации. – М.: Наука, 1986.