(cc) BY

ЕСТЕСТВЕННЫЕ НАУКИ (ФИЗИЧЕСКИЕ И ХИМИЧЕСКИЕ НАУКИ)

Павлов Андрей Валерианович

канд. физ.-мат. наук, доцент

ФГБОУ ВПО «Московский государственный технический университет радиотехники, электроники и автоматики»

г. Москва

ИНТЕГРАЛ ШВАРЦА И ЧЕТНОСТЬ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА

***Аннотация**: в работе приводятся новые условия четности или нечетности преобразований Лапласа. Автором с помощью этих условий выводятся формулы обращения преобразования Лапласа только по положительным действительным значениям. Свойства четности приводят к новому специальному решению задачи Дирихле в полуплоскости.*

***Ключевые слова**: преобразование Лапласа, преобразование Фурье, новые формулы, четность преобразования Лапласа, исчезновение действительной части, исчезновение мнимой части, задача Дирихле.*

1. Введение

В статье рассматривается преобразование Лапласа в связи с задачей Дирихле в верхней полуплоскости [1] в форме интеграла Шварца [7, с. 209 (равенство 6, лемма 1, теоремы 2)]. Доказывается разложение произвольной четной или нечетной функции на сумму преобразований Лапласа, каждое из которых аналитично в своей полуплоскости (теорема 2). С помощью данного разложения свойств четности-нечетности преобразования Лапласа (леммы 2, 3, см. также [2; 8; 9]) выводится замкнутая формула обращения преобразования Лапласа только по положительным действительным значениям без аналитических продолжений (теоремы 2, 3, см. также [1; 2]).

Кроме этого рассматривается новый класс функций (лемма 3, теорема 2 и [8; 9; 3]) преобразование Лапласа от которых четно или нечетно. Принципиальную роль для исследования свойств четности или нечетности преобразований

Лапласа играют лемма 2 [8] и теорема 2 [3]. Лемма 2 легко проверяется без использования других результатов данной статьи с помощью использования только общеизвестных математических фактов. Несмотря на некоторую ее очевидность данная лемма 2 сразу приводит к некоторым непредсказуемым следствиям в случае, когда функция данной леммы $S_0\,(x - a)$ нулю при $x = \pm\, a$, и $x = 0$ [8; 9].

Отметим, что формулы обращения (теорема 3 и работы [1; 2; 8; 9]) не являются основной целью данной статьи, поскольку являются явными следствиями четности или нечетности преобразований Лапласа [2; 3; 8; 9]. Автор не исследует связь четности преобразований Лапласа как с фундаментальным понятием аналитичности, функций так и с новым решением задач Дирихле, приведенным в теореме 1 (сама теорема 1 достаточно очевидна и давно известна [1]). Основная цель данной статьи привести в явной форме класс функций, для которых выполнены условия существования специального решения задачи Дирихле теоремы 1. Как следует из основных для данной работы частей 3 и 4 данный класс существенно не пуст (леммы 2.3 и теорема 2, см. также работы [2; 3; 8; 9].

Введем некоторые обозначения:

$$LZ(t)(\cdot)(x)=\int_0^\infty e^{-xt}Z(t)dt, x\in[0,\infty), L_+Z(t)(\cdot)(x)=\int_0^\infty e^{t}Z(t)dt, x\in[-\infty,0],$$

$$CoS(t)(\cdot)(x)=\int_0^\infty \cos xtS(t)dt, SiS(v)(\cdot)(x)=\int_0^\infty \sin xtS(t)dt, t\in[0,\infty).$$

$$F_\pm S(t)(\cdot)(p)=\int_{-\infty}^\infty e^{\pm pit}S(t)dt, p=x\in(-\infty,\infty), F_\pm^0 S(t)(\cdot)(p)=\int_0^\infty e^{\pm pit}S(t)dt, p=x\in(-\infty,\infty),$$

$$C^0\equiv Co, S^0\equiv Si; g(p)=(1/i\pi)\int_{-\infty}^\infty [u(t)[1/(t-p)]dt,\ Im\,p\geq 0,$$

(Последняя формула совпадает с интегралом Шварца [7, с. 209, равенство 6].)

2. Интеграл Шварца и преобразование Лапласа. Теоремы о связи преобразования Лапласа с интегралом Пуассона и интегралом Шварца.

Обозначим через D_u область регулярности функции $u\,(p)$.

В теореме 1 доказана вспомогательная для данной статьи теорема о значениях преобразования Лапласа *LF u (x) (·) (y)* на мнимой оси в предположении.

$$\lim_{p\to\pm\infty: Im\, p\geq 0} u(x)=0.$$

Данное условие в сочетании с условием регулярности функции *u (p)* в верхней полуплоскости является весьма ограничительным и трудно проверяемым. Ввиду этого данная теорема 1 носит исключительно вспомогательный характер.

В части два данной статьи приводятся теоремы, из которых следует, что класс функций выполнения условий теоремы 1 существенно не пуст.

Теорема 1.

Если $C_+ \in D_u, Re\, u(x)=u(x), x\in(-\infty,\infty)$, $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |u(x)|\,dx<\infty$, $\lim\limits_{p\to\pm\infty: Im\, p\geq 0} u(x)=0$, то:

1. Для случая $u(x)=u(-x), x\in(-\infty,\infty)$ имеет место равенство

$$(1/\pi)LF\_u(x)(\cdot)(y)=u(iy)=(1/\pi)\int\limits_0^{\infty}[2u(t)[y/(t^2+y^2)]dt, y\in(0,+\infty);$$

2. Для случая $u(x)=-u(-x), x\in(-\infty,\infty)$ имеет место равенство

$$(1/\pi)LF\_u(x)(\cdot)(y)=u(iy)=-i(1/\pi)\int\limits_0^{\infty}[u(t)[2t/(t^2+y^2)]dt, y\in(0,+\infty).$$

Доказательство.

Докажем сначала лемму 1.

Лемма 1.

1. Если $C_+ \in D_u$ и $\lim\limits_{p\to\infty: Im\, p\geq 0} u(x)=0$, то $g(iy)=u(iy), y\in[0,\infty), g(p)=u(p), p\in C_+$.

2. Если в добавок к условиям пункта 1 $g(iy)=(1/\pi)LF\_u(x)(\cdot)(y), y\in(0,+\infty)$ (если можно поменять пределы интегрирования в данном преобразовании Лапласа), и $\lim\limits_{x\to\pm\infty: Im\, x=0} u(x)=0$, то $g(ip)=u(pi), Re\, p\geq 0$.

Доказательство.

Доказательство легко следует из определения интеграла Шварца, совпадающего с введенным преобразованием Лапласа, и единственности решения задачи Дирихле в полуплоскости в приведенных условиях (подробное изложение доказательств приведено в работе [1]).

Из леммы 1 с помощью единственности решения задачи Дирихле в полуплоскости легко получается утверждение теоремы 1 (подробное доказательство приведено, например, в работе [1]).

Отметим, что в условиях теоремы 1 $u\ (ip)$ является аналитическим продолжением функции $(1/\pi)\ LF_{-}u\ (x)\ (\cdot)\ (y)$ с правой части плоскости на левую [1; 3; 5].

3. Обыкновенная четность преобразования Лапласа и решения задачи Дирихле с нулевой мнимой частью. Регулярность преобразования Лапласа в окрестности нуля.

Нам понадобится лемма 2 [8; 9].

Лемма 2. (О регулярности двойного преобразования Лапласа.)

Пусть функция $S_0\ (-z)$ регулярна в некоторой области $G\ (S)$ содержащей открытую окрестность нуля. Пусть $\{z : |z| < 2a\} \in G(S)$.

Из непрерывности функции $S_0\ (t)$ при всех $t \in [0, \infty)$ и абсолютной сходимости интеграла

$$\int_{-\infty}^{\infty} |S_0(t)|\, dt < \infty,$$

следует, что функции

$$R_{+}(z) = \int_0^{\infty} e^{zt} dt \int_0^{\infty} e^{itx} S_0(x-a) dx,$$

и

$$LLS_0(x-a)(\cdot)(z) = \int_0^{\infty} e^{-zt} dt \int_0^{\infty} e^{-tx} S_0(x-a) dx,$$

регулярны в открытой окрестности нуля $z : |z| < 2a$, причем функция $R_{+}\ (z)$ регулярна при всех $z : Im\, z > -2a \bigcap G(S)$.

Доказательство.

В интеграле

$$\int_0^\infty e^{pt}dt\int_{-\infty}^{-a} e^{txi}S_0(x)dx =$$

$$= \int_0^\infty e^{pt}dt\int_{-\infty}^{\infty} e^{txi}S_0(x)dx - \int_0^\infty e^{pt}dt\int_{-a}^{\infty} e^{txi}S_0(x)dx =$$

$$= L_+F_+S_0(x)(\cdot)(p) + [-\int_0^\infty e^{(p-ai)t}dt\int_0^\infty e^{txi}S_0(x-a)dx] =$$

первое слагаемое регулярно в области регулярности функции S_0 (–z), содержащей в себе открытую окрестность нуля, (данный факт широко известен в работах [1; 7; 8; 9; 2; 3; 10]), а второе слагаемое вместе с исходным интегралом

$$\int_0^\infty e^{pt}dt\int_{-\infty}^{-a} e^{txi}S_0(x)dx = \int_{-\infty}^{-a}[-S_0(x)/(p+ix)]dx$$

регулярно при всех $p: Im\, p \in (-a,+\infty), a > 0$. Следовательно, второе слагаемое регулярно при всех $z = p - ai : Im\, z \in (-2a,+\infty)$,включающих в себя открытую окрестность нуля $|z| < 2a$.

Первая наиболее важная часть леммы 2 доказана.

Регулярность двойного преобразования Лапласа следует [7; 8; 9] из равенства

$$LLS_0(x-a)(\cdot)(z) = \int_0^{+\infty}[S_0(x-a)/(z+x)]dx = (-i)R_+(iz), z \in (0,+\infty).$$

Лемма 2 доказана.

Следствие 1.

В условиях леммы 1 фукция

$$R_-(z) = \int_0^\infty e^{zt}dt\int_0^\infty e^{-itx}S_0(x-a)dx,$$

регулярна в области симметричной области регулярности *R_+ (z)* то есть в области $z: Im\, z < 2a \bigcap G_-(S), G_-(S) = z: -z \in G(S)$ [3].

Доказательство сразу следует из равенства

$$R_-(z) = \int_0^\infty[-S_0(x-a)/(z-ix)]dx = R_+(-z), z \in (-\infty,0),$$

полученного изменением пределов интегрирования в определении *R_- (z)*.

Замечание 1.

В условиях леммы 1 без требования регулярности $S_0\ (x)$ в какой-либо области имеют место равенства

$$SiL(S_0(x-a))(\cdot)(p) = LCo(S_0(x-a))(\cdot)(p) = R_1(p), Si = S^0, Co = C^0,$$
$$CoL(S_0(x-a))(\cdot)(p) = LSi(S_0(x-a))(\cdot)(p), p \in [0,\infty).$$

Доказательство является следствием изменения порядка интегрирования в обеих частях равенства $F_+LS_0(x-a)(\cdot)(p) = iLF_-S_0(x-a)(\cdot)(p), p \in [0,\infty)$.

Лемма 3. (О четности преобразования Лапласа.)

В условиях леммы 2, если дополнительно к этим условиям функция $S_0\ (-p)$ регулярна в некоторой открытой области, содержащей в себе всю мнимую ось, то [8,9]

$$R_1(-p) = -R_1(p), \text{ если } R_1(p) = \int_0^\infty e^{-pt}dt \int_0^\infty \cos txS_0(x-a)dx, p \in C,$$

и

$$R_2(-p) = R_2(p), \text{ если } R_2(p) = \int_0^\infty e^{-pt}dt \int_0^\infty \sin txS_0(x-a)dx, p \in C.$$

Доказательство.

Доказательство вытекает из леммы 2 с учетом очевидных равенств замечания 1

$$SiL(S_0(x-a))(\cdot)(p) = LCo(S_0(x-a))(\cdot)(p) = R_1(p), |\,p\,| < 2a > 0, Si = S^0, Co = C^0,$$
$$CoL(S_0(x-a))(\cdot)(p) = LSi(S_0(x-a))(\cdot)(p) = R_2(p),$$

которые по лемме 2 верны не только на действительной оси, но и в некоторой открытой окрестности нуля.

Следовательно, нечетное и, соответственно, четное отражение данных функций относительно нуля совпадает с самими функциями регулярными во всей комплексной плоскости [7; 8; 9].

Лемма 3 доказана.

Следствие 1.

Непосредственным следствием непрерывности на комплексной оси и четности или нечетности преобразования Лапласа является непредсказуемое следствие [8; 9]: если $S(-x) = S(x), x \in [0,\infty)$, то $L(iu) = -L(-iu), Re\,L(iu) = Re - L(-iu), L(p) = LC^0 S_0(x)(\cdot)(p)$ в условиях леммы 3 при $a = 0$. (Аналогично для нечетного случая.) Заметим, что любая функция при любой константе а представима в виде $S_0\ (x - a)$ – данное представление используется только для доказательства.

Следствие 2. (О выполнении теоремы 1 с точки зрения четности лемм 2 и 3.)

Условие теоремы 1 о стремления к постоянному пределу целой функции $u\ (p)$ [7] при приближении комплексного аргумента к бесконечности по любому пути верхней полуплоскости очевидно вытекает из свойства четности или нечетности преобразования Лапласа, и мы получаем, что в условиях леммы 3 данная теорема 1 имеет место.

4. Класс функций выполнения условий теоремы 1 с точки зрения нового решения задачи Дирихле в полуплоскости.

Из теоремы 2 следует, что класс функций теоремы 1 существенно не пуст и с другой точки зрения (по сравнению с фактами предыдущей части).

Теорема 2.

Если $u\ (p)$ регулярна четна или нечетна во всей плоскости C за исключением быть может конечного числа точек $J = \{z_1,\ldots,z_k\}$,не принадлежащих действительной или комплексной оси, причем

$$u(0) = 0, |u(p)| \le c/|p|^{1+\delta}, |p| \to +\infty, c < \infty, \delta > 0,\ \delta, c = const.,$$

то

$$\pi u(-it) = LF\_u(x)(\cdot)(t), t \in (-\infty,\infty).$$

Доказательство.

Рассмотрим сначала случай четной функции: $u\ (-p) = u\ (p)$.

Предположим, что функция $u\ (p)$ представима в виде

$$u\ (-ip) = u_1\ (p) + u_2\ (p),$$

где u_1 *(p)*регулярна в левой полуплоскости, а u_2 *(p)*регулярна в правой полуплоскости и данные функции определены и непрерывны на комплексной оси. Далее заодно доказывается возможность такого представления в условиях теоремы 2.

Используем широко известное [8; 9; 2; 3; 10; 11] в условиях теоремы 2 равенство

$$(1/2\pi)LF\_u(x)(\cdot)(p)+(1/2\pi)LF\_u(x)(\cdot)(-p)=u(-s)=u(ip), p=is, s\in(-\infty,\infty), u(0)=0;$$

здесь $u_1(p)=(1/2\pi)LF\_u(x)(\cdot)(-p)$, по определению, четное продолжение [8] функции $u_2(p)=(1/2\pi)LF\_u(x)(\cdot)(p)$ с правой полуплоскости на левую (для нечетной исходной функции *u (p)* выполнено аналогичное равенство, в котором вместо суммы используется разность преобразований Лапласа в точках *p* и *–p*). Для проверки данного равенства при условии *u (0) = 0* достаточно заметить, что значения преобразования Лапласа на комплксной оси в точках *is* и *– is* сопряжены при четной *u (p)*, и антисопряжены при нечетной *u (p)* – далее применяем формулу обращения косинус или синус преобразований Фурье [4; 6].

Ввиду непрерывности данных преобразований Лапласа на мнимой оси, представление в виде таких сумм $u_1(p)+u_2(p)=u_1^0(p)+u_2^0(p)$ единственно, так как разности $u_1(p)-u_1^0(p)=u_2^0(p)-u_2(p)$ ограничены во всей комплексной плоскости (левая часть регулярна в левой части плоскости, правая часть регулярна в правой части и данные функции непрерывны и регулярны на мнимой оси) и, следовательно, совпадают с нулевыми константами $u_1(p)-u_1^0(p)=u_2^0(p)-u_2(p)\equiv 0$.

Как следствие функция $u_2(t)$ действительна на всей действительной оси, так как значение аналитического продолжения $u_2(p)=(1/2\pi)LF\_u(x)(\cdot)(p)$ из правой в левую полуплоскость,совпадает при действительных отрицательных t_2 [8; 9; 2; 3] с

$$u_2(t_1)=(1/2\pi)LF\_u(x)(\cdot)(t_1)=-(1/2\pi)LF\_u(x)(\cdot)(-t_1)+u(-it_1), t_1=-t, t\in(0,+\infty),$$

где обе функции $LF\_u(x)(\cdot)(-t_1)=LF\_u(x)(\cdot)(t), u(-it_1)=u(it)$, чисто действительны при всех положительных действительных $t\in[0,+\infty), t_1=-t$, для четной *u (p)* (аналогично, данная функция чисто мнима при нечетной *u (p)*).

Докажем, что u_2 (is) чисто действительно при всех действительных. $s \in (-\infty, +\infty)$.

Аналогично первой части теоремы 2

$$u_2(ip) = u_2(-s) = L(is) + L_1(is),\ p = is \in C,\ p, ip \neq J, s \in (-\infty, \infty),$$

где

$$L(p) = (1/2\pi)LF\_u_2(x)(\cdot)(p), Re\, p > 0,$$

а выражение L_1 (p)в другой полуплоскости $Re\ p < 0$, имеет такое же аналитическое выражение как L (p)после изменения порядка интегрирования, то есть

$$L_1(p) = (1/2\pi)\int_0^{+\infty} u(t)dt/(p+it), Re\, p < 0.$$

Здесь u_2 (p)не является, вообще говоря, не четной ни нечетной функцией, поэтому L_1 (p) может не совпадать с L $(-p)$, но ввиду аналогичного равенства для четного продолжения u_2 $(-s)$ на действительной оси

$$u_2(-s) = L^2(is) + L^2(-is), s \in (0, +\infty),\ L^2(p) = (1/2\pi)LF\_u_2^0(x)(\cdot)(p), Re\, p > 0, p = is;$$
$$u_2^0(-s) = u_2(-s), s \in [0, +\infty), u_2^0(-s) = u_2(s), s \in (-\infty, 0],$$

мы получаем, что

$$L^2(p) + L^2(-p) = u_2(ip) = L(p) + L_1(p), p = is, s \in (0, +\infty),$$

что ввиду регулярности u_2 $(ip) = L$ $(p) + L_1$ (p) во всей коплексной плоскости за исключением быть может конечного числа точек, приводит к соответствующей регулярности суммы L^2 $(p) + L^2$ $(-p)$ в той же области. Пользуясь единственностью разложения на сумму с регулярными в левой и правой части плоскости слагаемыми, как в первой части доказательства данной теоремы, получаем L^2 $(p) = L$ (p), L^2 $(-p) = L_1$ (p) в области их регулярности.

Мы доказали, что u_2 $(p) = L$ $(p) + L_1$ $(-p)$, p, $ip \neq J$. Данный факт очевидно эквивалентен действительности u_2 (p) на всей мнимой оси [7].

Для доказательства теоремы 2 в случае четной u (p) остается воспользоваться очевидным равенством $u_2(is) = (1/2\pi)LF\_u(x)(\cdot)(is) = Re(1/2\pi)LF\_u(x)(\cdot)(is) = u(-s)/2, s \in (-\infty, \infty)$, вытекающим из формулы обращения косинус преобразования Фурье [6].

Заметим, что во второй части теоремы 2 нельзя пользоваться условием абсолютной сходимости интеграла от *u₂ (x)* ввиду $u_2(x) \sim const./x, x \to \pm\infty$. Данная трудность легко преодолевается досдовным повторением предудущих рассуждений теоремы 2 с заменой преобразований Лапласа на их выражения,полученные изменением порядка интегрирования в определении $LF\_u(x)(\cdot)(s), s \in (0, +\infty)$.

Для случая нечетной функции *u (p)* доказательство полностью аналогично.

Следствие 3.

В условиях теоремы 2 имеет место теорема 1.

5. Формулы обращения преобразования Лапласа только по положительным действительным значениям.

Теорема 3.

В условиях леммы 3

$$LL(S(x))(\cdot)(u) = SiCo(S(x))(\cdot)(u), u \in (0, \infty),$$

где

$$S(u) = Si(S_0(x-a))(\cdot)(u) = \int_0^\infty \sin ux S_0(x-a)dx, S_0(-a) = 0,$$

при произвольной константе $a \in (0, +\infty)$.

Доказательство.

Пусть $S_2(x) = S_0(x-a), x \in [0, \infty)$ и $S_2(x) = -S_0(|x|-a), x \in [-\infty, 0)$.

По определению

$$S_1(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} S_2(x)dx, t \in (-\infty, \infty); S_2(-x) = S_2(x), x \in (-\infty, \infty).$$

Из леммы 3 следует, что

$$Z(-t) = Z(t) = \int_0^\infty e^{itx} S_1(x)dx0, u \in [0, +\infty).$$

Пусть, по определению,

$$I\_(x) = 1, x \geq 0, I\_(x) = -1, x < 0.$$

Повторяя рассуждения статьи автора [1, теорема 1], получаем, что

$$2\int_0^\infty e^{iut}Z(t)dt = \int_0^\infty e^{iut}[Z(t)+Z(-t)]dt =$$

$$=\int_0^\infty e^{iut}dt\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}I\_S_1(x)dx = 2CoCo(S_1(x))(\cdot)(u) + 2iSiCo(S_1(x))(\cdot)(u), u\in[0,\infty),$$

где

$$I\_(x)S_1(x) = I\_(-x)S_1(-x), x\in[0,\infty).$$

Приравнивая мнимые части, получаем

$$(-1/i)2LL(S_1(x))(\cdot)(u) = 2CoCo(S_1(x))(\cdot)(u) + 2iSiCo(S_1(x))(\cdot)(u), u\in[0,\infty),$$

$$(-1/i)2LL(S_1(x))(\cdot)(u) = 2iSiCo(S_1(x))(\cdot)(u),$$

где последнее равенство следуют из очевидного, проверяемого изменением порядка интегрирования в обеих частях равенства ([7,8,9,2,3]), тождества

$$\int_0^\infty e^{iut}dt\int_0^\infty e^{itx}S_1(x)dx = (-1/i)LL(S_1(x))(\cdot)(u), u\in[0,\infty).$$

(Существование интегралов легко проверяется с помощью интегрирования по частям и условия $S_1(0) = 0$ [9].) Равенства, обеспечивающие существование повторных интегралов Фурье, вытекают из абсолютной сходимости интеграла от $|S_1(x)|$ на $(-\infty, \infty)$ на, которая, в свою очередь, следует из дополнительного условия абсолютной сходимости интеграла от непрерывной второй производной $S(x)$ следствия 2 и формулы интегрирования по частям.

Теорема 3 доказана.

Повторным применением теоремы 2 тоже получаем формулу обращения преобразования Лапласа только по положительным действительным значениям, аналогичную теореме 3 [1; 3].

Список литературы

1. Pavlov A.V. The integrals of Poisson and Schwartz and thetransformation of Laplace. India: Intern.journ.of Inform. Research and Review.

2. Pavlov A.V. The notion of evenness and the lemma of Jourdan. (In Russian.) Moscow: Euroasian Union of Scien. Works of 5th Intern.Scien.: Pract. Conf. Moscow, 29–30 aug. – n. 5 (part 5), P. 46–48.

3. Pavlov A.V. The Fourier,Laplace transformations and the Newton potential.USA:Scien. and Educ.Publ.Amer.Jour.of Appl.Mathem.and Stat, 2014. – v 2,6. – P. 398–401.

4. Камынин Л.И. Курс математического анализа. М.: Изд. Москов.университет. им.Ломоносова. – Т. II. – 1995. – 624 с.

5. Кашин Б.С. Ортогональные ряды. – М.: Наука, 1984. – 496 с.

6. Колмогоров А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1976. – 544 с.

7. Лаврентьев М.А. Методы теории функций комплексного переменногою. – М: Наука,1987. – 688 с.

8. Pavlov A.V. Reliable prognosis of the functions in the form of transformations of Fourier or Laplace.Bulletin of MIREA (Mosk.Inst.ofRad.Elect.and Autom). – 2014. – №2 (June). – P.78–85.

9. Павлов А.В. Дисциплины с приоритетом коротким требованиям и идентичное обслуживание.Монография. М.: ФГБОУ ВПО МГТУРЭА(МИРЭА), 2014. – 119 с.

10. Павлов А.В. Преобразование Фурье и формула обращения преобразования Лапласа. – М.: Матем.заметки. – 2011. – Т. 90. – №6. – С.792–796.

11. Sorokin V.N. On multiple orthogonal polynomials for discrete Meixner measures. M.: Journ. Mathem. Sb. – 2010. – T. 201. – P.137–160.