

ЕСТЕСТВЕННЫЕ НАУКИ

Голубцов Артём Александрович

студент

Николай Николаевич Калиткин

чл.-корр. РАН, заведующий кафедрой

ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский университет

«Московский институт электронной техники»

г. Москва

ОПИСАНИЕ ПРОЦЕССОВ ПЕРЕНОСА ИЗЛУЧЕНИЯ В РАССЕИВАЮЩИХ СРЕДАХ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МАКРОСКОПИЧЕСКИХ ОПТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК

Аннотация: в данной статье авторами рассматриваются методы статистического моделирования и возможности применения метода Монте-Карло для описания процессов взаимодействия оптического излучения с рассеивающими средами.

Ключевые слова: уравнение переноса излучения, рассеивающие среды, метод Монте-Карло, численное моделирование, запуск одиночных фотонов, запуск пакета фотонов.

В настоящее время излучение ближнего инфракрасного диапазона широко используется в медицинских диагностических исследованиях [1, 2, 6–10]. Это связано, среди прочего, с тем, что с помощью регистрации прошедшего или диффузно-отражённого лазерного излучения можно одновременно получить информацию о клеточном строении и биохимическом составе исследуемого объекта, поскольку рассеяние излучения определяется в первую очередь клеточным строением биологической ткани, а поглощение – концентрацией в этой ткани различных хромофоров.

В то же время следует отметить, что существующие оптические методы исследования биологических тканей обладают рядом недостатков, связанных, в

первую очередь, с проблемой точного математического описания процесса прохождения излучения через рассеивающие среды [1, 5–9, 19]. В связи с этим актуальным является использование численных методов для решения задач переноса излучения.

При описании излучения в линейной теории переноса используется такая характеристика излучения, как интенсивность – проходящий в среде поток лучистой энергии $I(\vec{r}, \vec{\Omega}, t)$. Среда может испускать излучение, как за счёт собственного первичного излучения, так и за счёт рассеяния излучения, приходящего с других сторон [2]. Примером может быть падающий на чисто поглощающее вещество с определённым коэффициентом поглощения $\mu(\xi)$ коллимированный (тонкий) пучок оптического излучения, испущенный лазером, с интенсивностью $I_0(t)$ (рис. 1.а). Если при прохождении рассматриваемого слоя пучок остаётся коллимированным, сохранит своё направление, то его интенсивность выражается следующим образом:

$$I(t, \xi) = I_0 \left(t - \frac{\xi}{v} \right) e^{-\int_0^{\xi} \mu(x) dx} . \quad (1)$$

Выражение (1) может быть применено для непоглощённых фотонов, то есть фотонов, которые не испытали взаимодействия с исследуемой средой. Совсем по-другому всё выглядит, если рассматривать сильно рассеивающую среду. После прохождения фотонами рассеивающей среды можно выделить фотоны, которые не испытавшие рассеяния и поглощения, данные фотоны называются баллистическими (рис. 1.б). К баллистическим фотонам ещё можно отнести фотоны, которые движутся приблизительно вдоль начальной оси. Можно сделать вывод, что на оси начального пучка излучения регистрируется как баллистические, так и приосевые фотоны. Также есть часть фотонов, которые при прохождении СРС рассеивались на большие углы и уже на выходе из рассматриваемого слоя вновь попадали на ось излучения и приобретали своё начальное направление

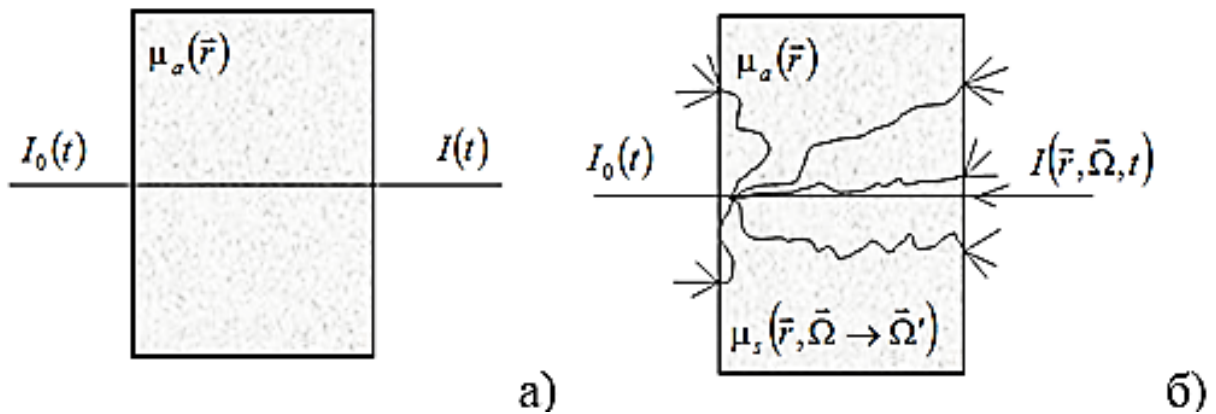


Рис. 1. Прохождение коллимированного пучка фотонов через слой чистопоглощающей (а) и сильнорассеивающей (б) среды [5]

Все остальные фотоны называются внеосевыми. Такие фотоны выходят из среды в разных точках и двигаются под разными углами. Кроме этого, существуют обратнорассеянные фотоны, или другими словами фотоны, которые вышли в обратном направлении из среды. Из-за отсутствия какого-либо воздействия со стороны среды баллистические фотоны описываются выражением (1) с учётом замены коэффициента поглощения на коэффициент экстинкции, который учитывает сумму коэффициентов рассеяния и поглощения, и определяющий взаимодействие со средой в случае не начального направления движения [5].

Коэффициент поглощения излучения обозначается через $\mu_a(\vec{r})$. Вероятность поглощения фотона определяется следующим выражением

$$dP = \mu_a(\vec{r})dl, \text{ которое считает элемент пути как } dl = vdt \text{ вблизи}$$

точки \vec{r} .

Коэффициент рассеяния излучения или индикатриса рассеяния обозначается как $\mu_s(\vec{r}, \vec{\Omega} \rightarrow \vec{\Omega}')$. Она предназначена для описания изменения движения

фотонов из начального направления $\vec{\Omega}$ в направление $\vec{\Omega}'$. А случай с вероятностью рассеяния выглядит следующим образом

$$dP = \mu_s(\vec{r}, \vec{\Omega} \rightarrow \vec{\Omega}')dl d\Omega'$$

(рис.3.а). В декартовой системе координат $\vec{r} = (x, y, z)$, а декартовы компоненты вектора удобнее выражать через сферические координаты:

$\vec{\Omega} = (\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z) = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta)$, где θ – полярный угол, а φ – азимутальный угол (рис. 2.б) [5].

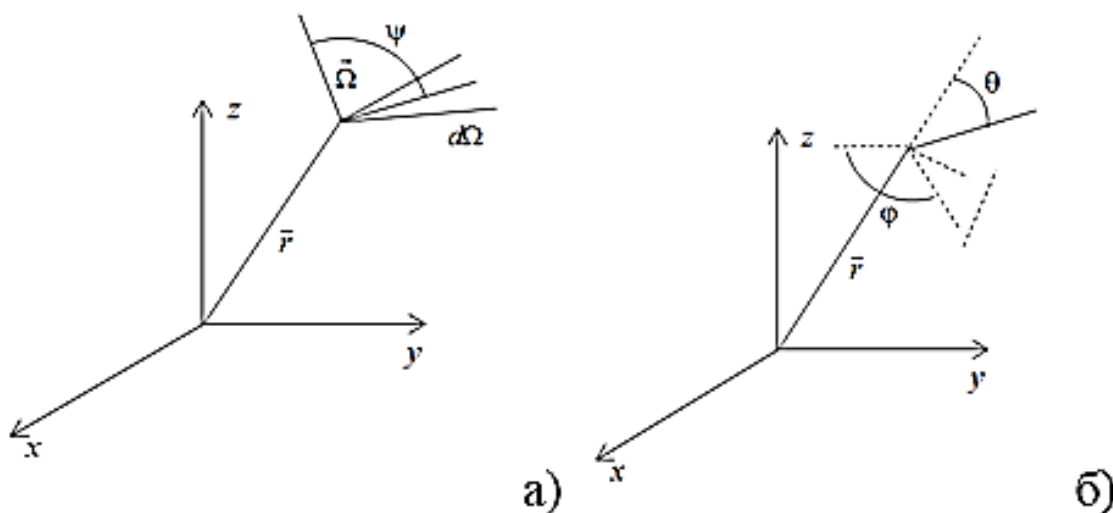


Рис. 2. Основные характеристики направления движения частиц: при рассеянии направления движения частицы меняется с $\vec{\Omega}$ на $\vec{\Omega}'$ (а); выражение декартовых компонент $\vec{\Omega}$ через сферические координаты (б) [5]

После выражения через сферические координаты элементарный телесный угол определяется, как $d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi$ и в случае другого направления

$d\Omega' = \sin \theta' d\theta' d\varphi'$. Вывод уравнения переноса излучения в неоднородной рассеивающей среде в нестационарном случае потребует рассмотрения частиц в элементарном объёме ΔV вблизи рассматриваемой точки \vec{r} за время Δt . За это время общее число частиц в рассматриваемом объёме изменится в результате того, что новые испускаются источником, другие испытывают поглощение, а также рассеяние, и ещё частицы уходят и приходят в этот объём за счёт постоянного движения. Выражение для переноса частиц можно записать как

$$f(\vec{r}, \vec{\Omega}, t + \Delta t) \Delta V = f(\vec{r}, \vec{\Omega}, t) + N_1 \Delta V \Delta t - N_2 \Delta V \Delta t - N_3 \Delta V \Delta t + N_4 \Delta V \Delta t - N_5 \Delta t + N_6 \Delta t. \quad (2)$$

В соотношении (2) $N_1 \Delta V \Delta t = S(\vec{r}, \vec{\Omega}, t) \Delta V \Delta t$ – число частиц, с

направлением движения $\vec{\Omega}$, появившихся в элементарном объёме ΔV за время

Δt , а $S(\vec{r}, \vec{\Omega}, t)$ – плотность источников излучения, известная заранее.

$N_2 \Delta V \Delta t = \Phi(\vec{r}, \vec{\Omega}, t) \mu_a(\vec{r}) \Delta V \Delta t$ – количество частиц, с направлением дви-

жения $\vec{\Omega}$, поглощённых в элементарном объёме ΔV за время Δt . Для рас-

смотрения частиц, рассеянных из направления $\vec{\Omega}$ в другое направление $\vec{\Omega}'$,

вводится коэффициент рассеяния $\mu_s(\vec{r}) = \iint_{4\pi} \mu_s(\vec{r}, \vec{\Omega} \rightarrow \vec{\Omega}') d\Omega' = \iint_{4\pi} \mu_s(\vec{r}, \vec{\Omega} \rightarrow \vec{\Omega}) d\Omega$. Ис-

ходя из этого для числа частиц, изменивших направление движения с $\vec{\Omega}$ на какое-

либо другое направление $\vec{\Omega}'$, верно следующее выражение

$$N_3 \Delta V \Delta t = \left[\iint_{4\pi} \Phi(\vec{r}, \vec{\Omega}, t) \mu_s(\vec{r}, \vec{\Omega} \rightarrow \vec{\Omega}') d\Omega' \right] \Delta V \Delta t = \Phi(\vec{r}, \vec{\Omega}, t) \mu_s(\vec{r}) \Delta V \Delta t. \quad \text{Для числа}$$

частиц, которые поменяли направление своего движения с направления $\vec{\Omega}'$ на

направление $\vec{\Omega}$, верно следующее выражение $\Phi(\vec{r}, \vec{\Omega}', t)$ нельзя вынести из-

под знака интеграла. Данный интеграл также имеет название интеграла столкно-

вений, он описывает столкновения частиц со средой. Количество частиц, вышед-

ших из рассматриваемого объёма за определенное время, выражается следую-

щим образом $N_5 \Delta t = \left[\iint_{\vec{\Omega} \cdot \vec{n} < 0} \vec{\Omega} \cdot \vec{n} \Phi(\vec{r}, \vec{\Omega}, t) ds \right] \Delta t$, в нём интегрирование ведётся по по-

верхности S рассматриваемого объёма ΔV , а условие $\vec{\Omega} \cdot \vec{n} > 0$ говорит о том,

что движение частиц направлено наружу из рассматриваемого объёма. Количе-

ство частиц, попавших в рассматриваемый объём ΔV за время Δt , выража-

ется следующим образом $N_5 \Delta t = - \left[\iint_{\bar{\Omega} \bar{n} < 0} \bar{\Omega} \bar{n} \Phi(\bar{r}, \bar{\Omega}, t) ds \right] \Delta t$. В данном выраже-

нии условие $\bar{\Omega} \bar{n} < 0$ говорит о том, что движение частиц направлено внутрь рассматриваемого объёма ΔV , а знак «минус» учитывает условие $\bar{\Omega} \bar{n} < 0$. То-

гда алгебраическая сумма $N_5 \Delta t + N_6 \Delta t = - \left[\iint_S \bar{\Omega} \bar{n} \Phi(\bar{r}, \bar{\Omega}, t) ds \right] \Delta t$. Интегрирование

производится уже по всей замкнутой поверхности S . Подставляем данные вы-

ражения в соотношение (2) и делим обе части равенства на $\Delta V \Delta t$ и учитываем,

что

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(\bar{r}, \bar{\Omega}, t + \Delta t) - f(\bar{r}, \bar{\Omega}, t)}{\Delta t} = \frac{\partial}{\partial t} f(\bar{r}, \bar{\Omega}, t), \quad (3)$$

$$\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\iint_S \bar{\Omega} \bar{n} \Phi(\bar{r}, \bar{\Omega}, t) ds}{\Delta V} = \text{div}(\bar{\Omega} \Phi(\bar{r}, \bar{\Omega}, t)) = \bar{\Omega} \text{grad}(\Phi(\bar{r}, \bar{\Omega}, t)), \quad (4)$$

получим

$$\frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} f(\bar{r}, \bar{\Omega}, t) + \bar{\Omega} \text{grad}(\Phi(\bar{r}, \bar{\Omega}, t)) + \mu(\bar{r}) \Phi(\bar{r}, \bar{\Omega}, t) - \int_{4\pi} \Phi(\bar{r}, \bar{\Omega}, t) \mu_s(\bar{r}, \bar{\Omega} \rightarrow \bar{\Omega}') d\Omega' = S(\bar{r}, \bar{\Omega}, t), \quad (5)$$

где $\mu(\bar{r}) = \mu_a(\bar{r}) + \mu_s(\bar{r})$. Выразив $f(\bar{r}, \bar{\Omega}, t)$ через $\Phi(\bar{r}, \bar{\Omega}, t)$, получим окончательно нестационарное уравнение переноса излучения в односкоростном приближении [5]:

$$\frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \Phi(\bar{r}, \bar{\Omega}, t) + \bar{\Omega} \text{grad}(\Phi(\bar{r}, \bar{\Omega}, t)) + \mu(\bar{r}) \Phi(\bar{r}, \bar{\Omega}, t) - \int_{4\pi} \Phi(\bar{r}, \bar{\Omega}, t) \mu_s(\bar{r}, \bar{\Omega} \rightarrow \bar{\Omega}') d\Omega' = S(\bar{r}, \bar{\Omega}, t). \quad (6)$$

В стационарном случае уравнение переноса излучения можно записать следующим образом:

$$\bar{\Omega} \text{grad}(\Phi(\bar{r}, \bar{\Omega})) + \mu(\bar{r}) \Phi(\bar{r}, \bar{\Omega}) - \int_{4\pi} \Phi(\bar{r}, \bar{\Omega}) \mu_s(\bar{r}, \bar{\Omega} \rightarrow \bar{\Omega}') d\Omega' = S(\bar{r}, \bar{\Omega}). \quad (7)$$

Нестационарное уравнение переноса излучения, выведенное ранее, не имеет аналитического решения. Возникает необходимость развития методов решения

задач теории переноса излучения для сред с произвольной конфигурацией и любыми граничными условиями. Для решения таких задач перспективен метод Монте-Карло, широко применяемый для численного решения уравнения теории переноса излучения. Метод Монте-Карло базируется на численном моделировании транспорта фотонов в рассеивающей среде. Случайное блуждание фотонов внутри образца биоткани прослеживается от точки влета в образец до его поглощения или выхода из образца [3, 4, 11–18].

Для того чтобы изучить общий случай смешанного поглощения и рассеяния для более реалистичной геометрии, используется подход Монте-Карло. Он позволяет рассчитать, распределение поглощенной «дозы» в ткани и повторный отклик имплантированных оптических волокон, используемых в качестве детекторов потока фотонов.

Технология основана на стохастической природе радиационных взаимодействий. Таким образом, ослабление световых фотонов в ткани могут быть описаны с помощью компьютерного моделирования взаимодействия случайного поглощения и рассеяния [20].

Метод статистического моделирования (Монте-Карло) может быть использован для расчёта:

- временных распределений интенсивности излучения, прошедшего через биологическую среду (что дает возможность построить график зависимости распределения интенсивности от времени);
- пространственных распределений интенсивности излучения, прошедшего через биологическую среду (дает возможность построить график зависимости распределения интенсивности от объёма);
- пространственных распределений интенсивности поглощённого биологической средой излучения (дает возможность построить график зависимости поглощенного излучения по объёму, на котором можно увидеть в каких местах поглощались фотоны).

Рассмотрим случайную величину χ , которая необходима в Монте-Карло распространения фотона в ткани. Эта переменная может быть переменным шагом фотона между участками взаимодействия фотон-ткань, или углом отклонения рассеянного фотона, который может возникнуть в акте рассеяния.

Для моделирования распространения нам необходимо иметь возможность выбирать значение χ неоднократно и случайным образом, основываясь на числовом генераторе псевдослучайных чисел. Компьютер дает случайную величину ξ которая равномерно распределена на интервале (0, 1). Интегральная функция распределения этой равномерно распределенной случайной величины [20]:

$$F_{\xi}(\xi) = \xi. \quad (8)$$

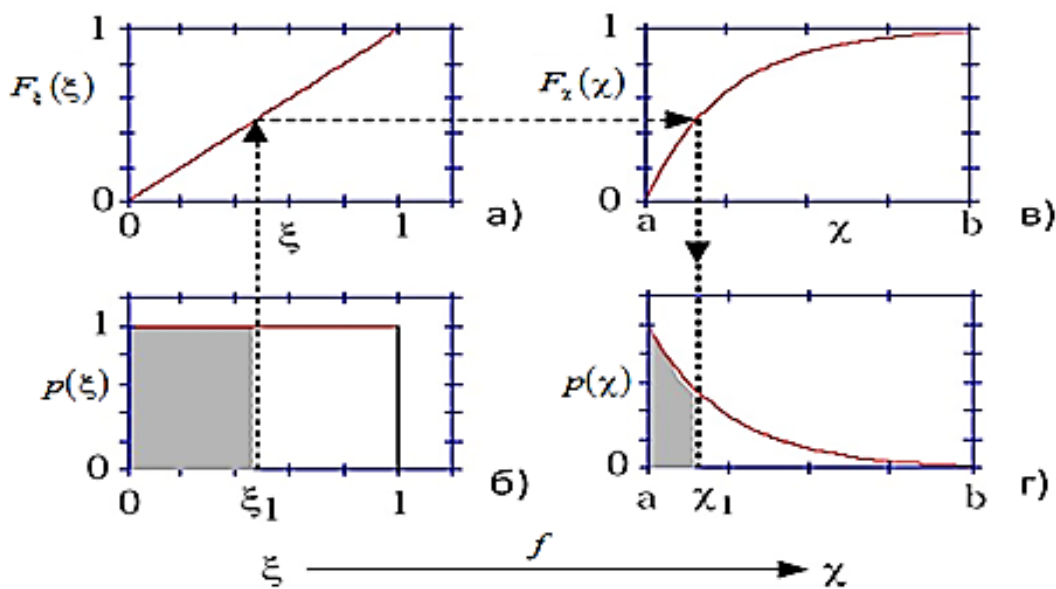


Рис. 3. Выбор случайной величины χ .

$$F_{\xi}(\xi) - \text{а}), p(\xi) - \text{б}), F_{\chi}(\chi) - \text{в}), p(\chi) - \text{г)}$$

Процесс отбора случайной величины, или процесс преобразования $\chi_1 = f(\xi_1)$, показан на рисунке 3. Затемнённые области равны друг другу.

Приравниваем формулу $F_{\chi}(\chi)$ к ξ :

$$F_{\gamma}(\chi) = 1 - e^{-\mu_r \chi} = \xi. \quad (9)$$

Выражаем из формулы (9) случайную величину χ , которую необходимо было определить:

$$\chi = -\frac{\ln(1 - \xi)}{\mu_r}. \quad (10)$$

Далее получаем конечное выражение для определения длины пробега фотона:

$$s = \chi = -\frac{\ln(\xi)}{\mu_r}. \quad (11)$$

Метод Монте-Карло начинается с запуска фотонов в ткань. Начальные координаты, как правило, одинаковы для всех фотонов.

Текущая позиция фотона определяется декартовыми координатами (x, y, z) . Направление потока фотонов задается единичным вектором \vec{r} и может быть эквивалентно описано направлением косинусов (μ_x, μ_y, μ_z) :

$$\begin{aligned} \mu_x &= \vec{r} \cdot \vec{x} \\ \mu_y &= \vec{r} \cdot \vec{y}, \\ \mu_z &= \vec{r} \cdot \vec{z} \end{aligned} \quad (12)$$

где $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ единичные векторы вдоль каждой оси. Начальное положение фотонов задается $(0,0,0)$ и направляющие косинусы устанавливаются на $(0,0,1)$. Описание позиции и направления фотонов в декартовой системе координат оказалось проще, чем описание в цилиндрической системе координат.

После «генерации» фотона рассчитывается длина пробега до взаимодействия со средой

$$\chi = -\frac{\ln(\xi)}{\mu_t}, \quad (13)$$

где $\mu_t = \mu_a + \mu_s$ является полным ослаблением коэффициента. Эта формула генерирует экспоненциальное распределение длины путей взаимодействия.

Когда длина шага определена и фотон готов к перемещению в ткани, положение фотона обновляется:

$$\begin{aligned} x &\leftarrow x + \mu_x \Delta \\ y &\leftarrow y + \mu_y \Delta \\ z &\leftarrow z + \mu_z \Delta \end{aligned} \quad (14)$$

Фотон однозначно описывается пятью переменными: три пространственных координаты положения и два направленных угла для направления движения. Однако удобно описывать пространственное положение фотона тремя декартовыми координатами и направлением движения с тремя направляющими косинусов [2]. Необходимые для распространения формулы просты, и угловые переменные, описывающие направление фотона не изменяются, если меняется направление фотона. Направляющие косинусы задаются, принимая косинус угла как направление фотона по каждой оси.

Вероятность поглощения фотона определяется уравнением:

$$P_a = \frac{\mu_a}{\mu_t}. \quad (15)$$

Поглощение происходит в случае когда $\chi = \text{random}(0;1) \leq P_a$.

Если фотон поглотился, переходим к расчёту траектории следующего фотона.

Если фотон не поглотился, то считается, что он рассеялся. Вероятность рассеяния фотона определяется уравнением:

$$P_s = \frac{\mu_s}{\mu_t} = 1 - P_a. \quad (16)$$

Рассеяние происходит в случае когда $\gamma = \text{random}(0;1) > P_a$.

Если фотон рассеялся, меняем направление движения. Для определения направления движения фотонов после рассеяния понадобятся: угол отклонения $\theta \in [0, \pi)$ и азимутальный угол $\psi \in [0, 2\pi)$ [13].

Азимутальный угол ψ , который равномерно распределен в интервале от 0 до 2π , находится:

$$\psi = 2\pi\xi. \quad (17)$$

Распределение вероятностей для косинуса угла отклонения $\cos \theta$ описывается функцией рассеяния Хеньи-Гринштейна [3]. Анизотропия, g , равна $\langle \cos \theta \rangle$ и имеет значение от -1 до 1. Значение 0 указывает на изотропное рассеяние, а значения вблизи 1 указывает на прямо-направленное рассеяние. Значения g в диапазоне от 0,3 до 0,98 для тканей, но довольно часто g составляет $\sim 0,9$ в видимой области спектра. Выбор для $\cos \theta$ может быть выражен в виде функции случайного числа, ξ :

$$\cos \theta = \frac{1}{2g} \left\{ 1 + g^2 - \left[\frac{1 - g^2}{1 - g + 2g\xi} \right]^2 \right\}, \quad (18)$$

если коэффициент анизотропии $g > 0$.

$$\cos \theta = 2\xi - 1, \quad (19)$$

если коэффициент анизотропии $g = 0$.

После того, как угол отклонения и азимутальный угол выбраны, новое направление пакета фотонов можно вычислить:

$$\begin{aligned}\mu'_x &= \frac{\sin \theta}{\sqrt{1-\mu_z^2}} (\mu_x \mu_z \cos \psi - \mu_y \sin \psi) + \mu_x \cos \theta \\ \mu'_y &= \frac{\sin \theta}{\sqrt{1-\mu_z^2}} (\mu_y \mu_z \cos \psi + \mu_x \sin \psi) + \mu_y \cos \theta. \\ \mu'_z &= -\sin \theta \cos \psi \sqrt{1-\mu_z^2} + \mu_z \cos \theta\end{aligned}\quad (20)$$

Если угол пакета фотонов находится слишком близок к нормали поверхности ткани (например, $|\mu_z| > 0.9999$), могут быть использованы следующие формулы [20]:

$$\begin{aligned}\mu'_x &= \sin \theta \cos \psi \\ \mu'_y &= \sin \theta \sin \psi \\ \mu'_z &= \text{SIGN}(\mu_z) \cos \theta\end{aligned}\quad (21)$$

Расчёт траектории фотона прекращается в случае, если фотон:

- поглотился;
- покинул границы области моделирования.

Движение фотонов прекращается в том случае, когда поглощается или покидает границы области моделирования заданное количество фотонов.

Результатом могут быть данные о:

- длине траектории фотона (и, соответственно, времени его движения в среде);
- координатах точки пересечения фотоном границы среды;
- координатах точки поглощения фотона.

На рисунке 4 представлена общая блок-схема метода Монте-Карло для случая расчёта траекторий фотонов.

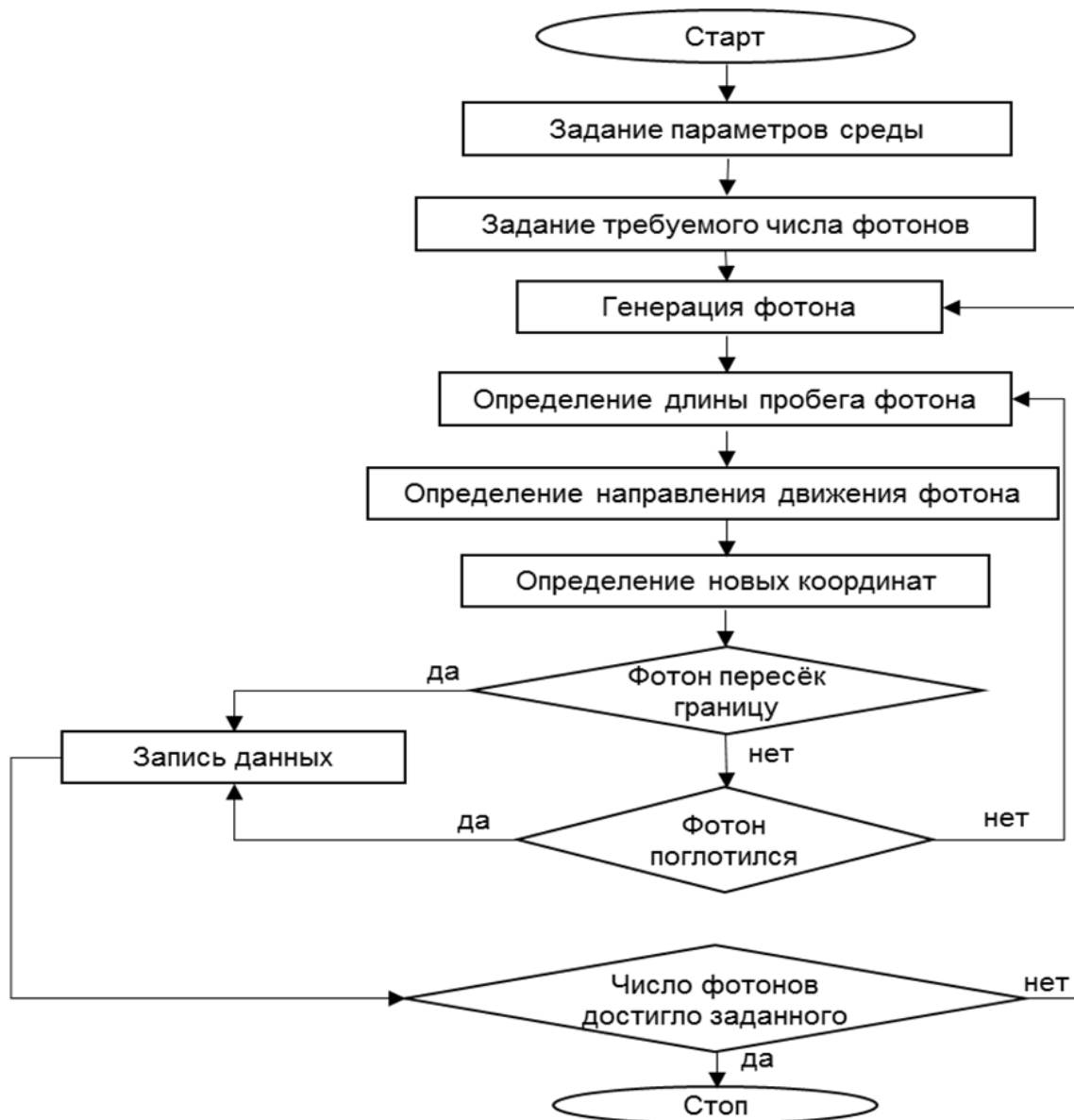


Рис. 4. Общая блок-схема метода Монте-Карло

Для уменьшения времени моделирования (уменьшения числа операций) можно использовать так называемые весовые функции вместо одиночных фотонов. Каждому пакету фотонов изначально назначают вес W равный единице. Фотон вводят ортогонально в ткань в начале координат, что соответствует коллимированному произвольному узкому пучку фотонов. Затем как и для одного фотона задают начальные координаты и определяют длину шага.

При поглощении должно быть рассчитано некоторое ослабление веса фотонов. Часть текущего веса фотонов W , будет записана в локальную ячейку элемента. Количество осажденного веса фотонов ΔW рассчитывается как:

$$\Delta W = W \frac{\mu_a}{\mu_t} . \quad (22)$$

Общий суммарный вес фотона, хранящийся в этой локальной ячейке элемента, обновляется путем добавления ΔW . Новый вес фотона W записывается как:

$$W \leftarrow W - \Delta W . \quad (23)$$

Следует отметить, что весь пакета фотонов испытывает взаимодействие в конце шагов поглощения или рассеяния.

При рассеянии происходит перенаправление движения, и расчет нового направления происходит аналогично одному фотону.

У пакетов фотонов, которые до сих пор, распространяются внутри ткани, у которых вес фотона W был достаточно уменьшен после многих шагов взаимодействия, и упал ниже порогового значения (например, $W_{th} = 0.0001$), дальнейшее дополнительное распространение фотона дает мало информации. Тем не менее, прекращение движения должно быть выполнено правильно для обеспечения сохранения энергии (или числа фотонов). Метод, называемый рулетка, используется для завершения движения пакета фотонов, когда $W \leq W_{th}$. Техника рулетка дает пакету фотонов шанс выжить с весом mW (например, $m = 10$) и продолжить движение. Если пакет фотонов не выживает в рулетке, вес сводится к нулю и движение прекращается.

$$W = mW \quad \text{если } \xi \leq 1/m, \quad (24)$$

$$W = 0 \quad \text{если } \xi > 1/m, \quad (25)$$

где ξ – равномерное распределение псевдослучайных чисел. Этот метод сохраняет энергию и завершает движение фотонов.

Уравнение переноса излучения с учётом рассеяния является основным способом описания взаимодействия оптического излучения с биологическими тканями, но оно не имеет аналитического решения, что делает актуальным использование численных решений этого уравнения.

Основным способом получения численного решения уравнения переноса излучения с учётом рассеяния является использование статистического моделирования (метода Монте-Карло).

Метод Монте-Карло позволяет получить:

- временное распределение интенсивности излучения, прошедшего через биологическую среду;
- пространственное распределение интенсивности излучения, прошедшего через биологическую среду;
- пространственное распределение интенсивности поглощённого биологической средой излучения.

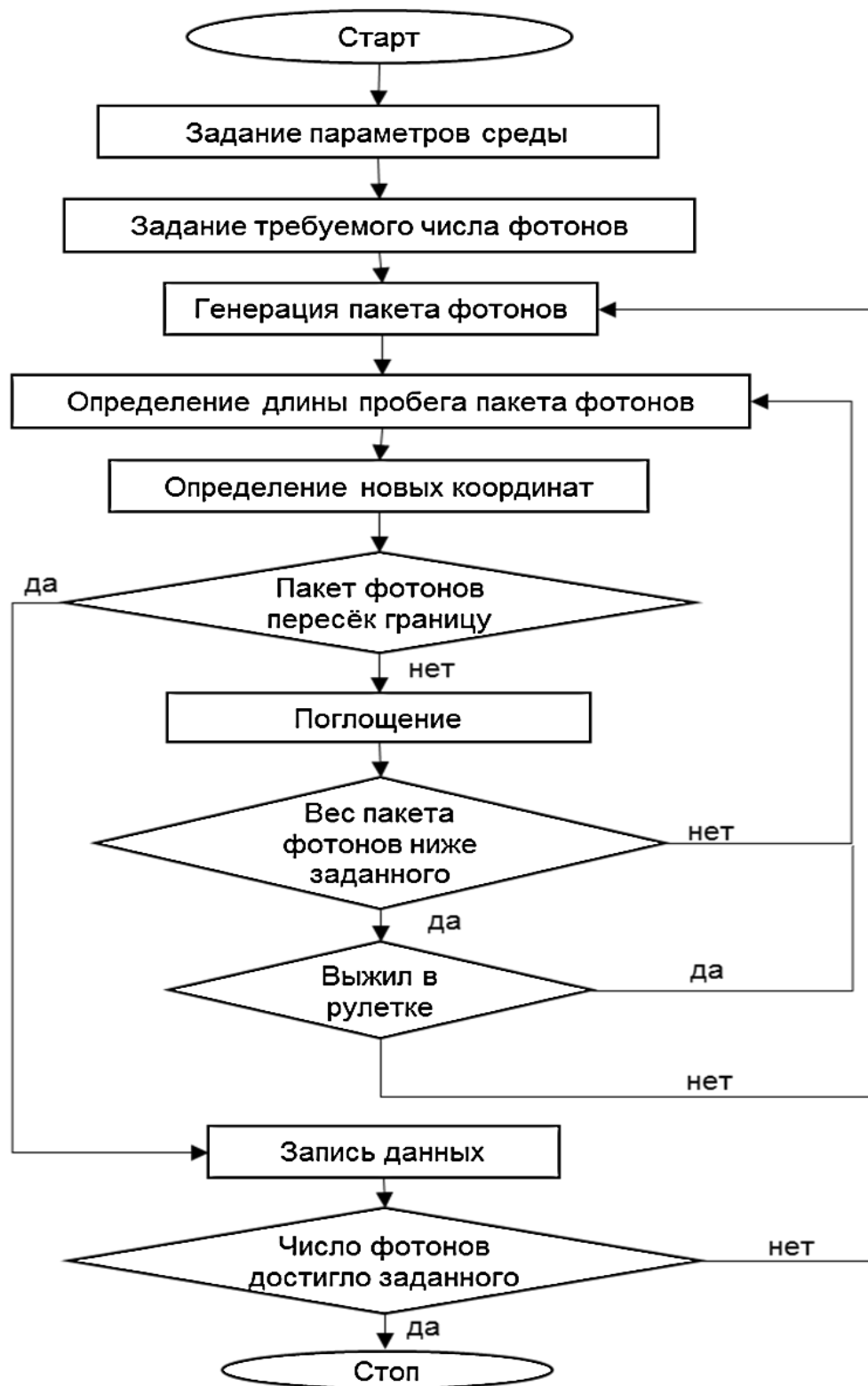


Рис. 5. Блок-схема метода Монте-Карло с использованием пакета фотонов

Существенной особенностью практической реализации метода Монте-Карло является необходимость использования компьютерного генератора псев-

дослучайных чисел, имеющих равномерное распределение плотности вероятности, для моделирования случайных чисел, имеющих произвольное распределение плотности вероятности.

Основным недостатком использования метода Монте-Карло для решения задач переноса являются существенные затраты машинного времени. Основным способом решения указанной проблемы является использование весовых функций («пакета фотонов»).

Список литературы

1. Александров М.Т. Лазерная клиническая биофотометрия (теория, эксперимент, практика). – М.: Техносфера, 2008. – 584 с.
2. Васильева И.А. Стационарное излучение объектов с рассеивающими средами // Успехи физических наук. – 2011. – Том 171. – №12. – С. 1317–1346.
3. Данилов А.А. Математическое моделирование переноса энергии оптическим излучением через биологические ткани методом Монте-Карло / А.А. Данилов, С.А. Долгушин, Э.А. Миндубаев, С.А. Терещенко, С.А. Титенок // Медицинская техника. – 2013. – №6. – С. 34–38.
4. Данилов А.А. Экспериментальное определение коэффициентов рассеяния и поглощения излучения в однородном слое сильнорассеивающей биологической среды / А.А. Данилов, Ю.П. Маслобоев, С.В. Селищев, С.А. Терещенко // Медицинская техника. – 2006. – №4. – С. 17–20.
5. Терещенко С.А. Вычислительная томография. – М.: МИЭТ, 2002. – Т. 3. – 91 с.
6. Терещенко С.А. Осевая и диффузионная модели прохождения лазерного импульса через сильно рассеивающую среду / С.А. Терещенко, А.А. Данилов, В.М. Подгаецкий, Н.С. Воробьев // Квантовая электроника. – 2004. – Т. 34. – №6. – С. 541–544.
7. Терещенко С.А., Данилов А.А. Подгаецкий В.М. Уточненная диффузионная модель для описания взаимодействия лазерного излучения с биологической тканью / С.А. Терещенко, А.А. Данилов, В.М. Подгаецкий // Оптика и спектроскопия. – 2007. – Т. 102. – №5. – С. 849–854.

8. Тучин В.В. Лазеры и волоконная оптика в биомедицинских исследованиях. – М.: Физматлит, 2010. – 500 с.

9. Тучин В.В. Оптика биологических тканей. Методы рассеяния света в медицинской диагностике. – М.: Физматлит, 2012. – 816 с.

10. Тучин В.В. Оптическая биомедицинская диагностика. – М.: Физматлит, 2007. – Т. 1. – 560 с.

11. Binder K., Heermann D. Monte Carlo simulation in statistical physics. – Springer, Heidelberg, 2010. – 202 p.

12. Jacques S. L., Alter C. A., Prahl S. A. Angular dependence of HeNe laser light scattering by human dermis // Lasers Life Sci. – 1987.- Vol. 1. – P. 309-333.

13. Krasnikov I.V., Seteikin A.Yu. An analysis of thermal effects resulting from laser radiation interaction with a multilayered biotissue // Russian Physics Journal. – 2006. – Vol. 49. – № 10. – P. 1139-1144.

14. Malov A.N., Seteikin A.Yu., Neupokoeva A.V., Fetschenko V.S., Vaychas A.A. The laser radiation action on the biological objects // Optik – International Journal for Light and Electron Optics. – 2013. – Vol. 124. – № 23. – P. 6034-6041.

15. Malvin H., Kalos, Paula A. Whitlock Monte Carlo Methods. – WILEY-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, Weinheim, 2008. – 217 p.

16. Privalov V.E., Seteikin A. Yu., Fotiadi A.E. Simulation of laser radiation propagation in inhomogeneous media with complex geometry // St. Petersburg State Polytechnical University Journal. Physics and Mathematics. – 2013. – Vol. 182. – №4. – P. 148-153.

17. Seteikin A.Yu. Analysis of the diffusion processes of the laser radiation in multilayered biomaterials with the Monte-Carlo method // Russian Physics Journal. – 2005. – Vol. 48. – № 3.- P. 53-57.

18. Seteikin A. Yu. Monte Carlo Analysis of the Propagation of Laser Radiation in Multilayer Biomaterials // Russian Physics Journal. – 2005. – Vol. 48. – № 3. – P. 280-284.

19. Vo-Dhin T. Biomedical Photonics Handbook. – Boca Raton, New York, London, Washington D.C.: CRC Press, 2003. – 827 p.

20. Wang L., Jacques S. L. Monte Carlo Modeling of Light Transport in Multi-layered Tissues in Standard C. – University of Texas M. D. Anderson Cancer Center, 1992. – Vol. 1. – 177 p.