

ЕСТЕСТВЕННЫЕ НАУКИ

Холмирзоев Диловар Назиржонович

студент

Масалыгина Алена Сергеевна

студентка

Черных Анатолий Григорьевич

канд. физ.-мат. наук

ФГБОУ ВПО «Красноярский государственный педагогический
университет им. В.П. Астафьева»
г. Красноярск, Красноярский край

ЭЛЛИПС В МАТЕМАТИКЕ И ФИЗИКЕ

Аннотация: в данной статье рассматривается математика, лежащая в основе измерения разности фаз между двумя напряжениями с помощью осциллографа. Приводится пример программы компьютерного построения фигуры, которая будет построена осциллографом.

Ключевые слова: разность фаз, осциллограф, сдвиг фаз, напряжение, наклонный эллипс.

В физике распространена ситуация, когда две измеряемые величины, зависящие от времени по гармоническому закону, отличаются по фазе. Разность фаз, как правило, несет информацию об исследуемом объекте. Типичный пример рассмотрен в работах [1, с. 133; 2, с. 124]. Такие задачи возникают при изучении процессов, в которых исследуется закон электромагнитной индукции. Наша задача – показать школьникам и студентам младших курсов, как измерять разность фаз между двумя напряжениями с помощью осциллографа.

На горизонтальную и вертикальную развертки осциллографа подадим сигналы:

$$\left. \begin{aligned} x &= x_0 \cos(\omega t), \\ y &= y_0 \cos(\omega t + \alpha) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Здесь α – величина фазового сдвига.

Отсюда

$$\left(\frac{x}{x_0}\right) = (\cos \omega t), \quad (2)$$

поэтому

$$\frac{y}{y_0} = \cos(\omega t + \alpha) = \cos(\omega t) \cos \alpha - \sin(\omega t) \sin \alpha. \quad (3)$$

Подставим (2) в (3) и получим

$$\frac{y}{y_0} = \frac{x}{x_0} \cos \alpha - \sin(\omega t) \sin \alpha. \quad (4)$$

Используя (2), $\sin(\omega t)$ представим в виде

$$\sin(\omega t) = \sqrt{1 - \cos^2(\omega t)} = \sqrt{1 - \frac{x^2}{x_0^2}}. \quad (5)$$

Подставим (5) в (4):

$$\frac{y}{y_0} = \frac{x}{x_0} \cos \alpha - \sin \alpha \sqrt{1 - \frac{x^2}{x_0^2}}. \quad (6)$$

Соотношение (6) запишем в виде

$$\sin \alpha \sqrt{1 - \frac{x^2}{x_0^2}} = \left(\frac{x}{x_0} \cos \alpha - \frac{y}{y_0}\right). \quad (7)$$

Возведем в квадрат левую и правую часть:

$$\sin^2 \alpha \left(1 - \frac{x^2}{x_0^2}\right) = \frac{x^2}{x_0^2} \cos^2 \alpha - 2 \frac{xy}{x_0 y_0} \cos \alpha + \frac{y^2}{y_0^2}. \quad (8)$$

Соотношение (8) запишем в виде

$$\sin^2 \alpha = \frac{x^2}{x_0^2} \sin^2 \alpha + \frac{x^2}{x_0^2} \cos^2 \alpha - \frac{xy}{x_0 y_0} \cos \alpha + \frac{y^2}{y_0^2}. \quad (9)$$

После очевидных преобразований (9) принимает вид

$$\frac{x^2}{x_0^2} - 2 \frac{xy}{x_0 y_0} \cos \alpha + \frac{y^2}{y_0^2} = \sin^2 \alpha. \quad (10)$$

Соотношение (10) определяет фигуру, которая будет построена осциллографом. Компьютерный вариант построения зависимости (10), выполненный с помощью программы Maple 14, показан на рис. 1.

Для системы (1):

> *with(plots);*

> $x_0 := 4; y_0 := 6; \omega := 10; \phi := \frac{\pi}{8}; \alpha := \frac{\pi}{3};$

> *plot([$x_0 \cos(\omega t + \phi), y_0 \cos(\omega t + \phi + \alpha), t = 0..3], x = -8..8, y = -8..8, color =, black)$*

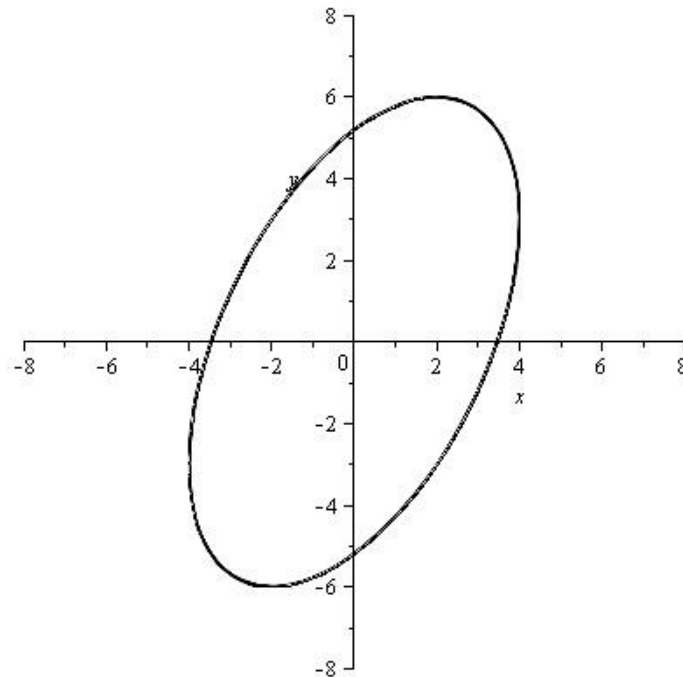


Рис. 1. Наклонный эллипс

Тот же график можно построить легко с помощью программы на Turbo Basic. Ниже приведена эта программа.

screen 9 (графический режим)

window (-6,-4)-(6,4) (размер окна)

color 0

line(-6,0)-(6,0) (координатные линии)

line(0,-4)-(0,4)

a=1.57/5

w=3 (частота)

x0=2 (амплитуда сигнала x(t))

y0=1(амплитуда сигнала y(t))

dt=0.01

```
for t=0 to 6 step dt (цикл построения графика)
x=x0*cos(w*t)
y=cos(w*t+a)
pset(x,y),2
next t
```

Задача состоит в том, чтобы по фигуре наклонного эллипса определить α .

Сравнивая график эллипса (рис. 1) с соотношением (10), видим, что при $x=0$

$$y^2 = \sin^2 y_0^2. \quad (11)$$

Отсюда

$$y = \pm y_0 \sin \alpha. \quad (12)$$

Из выражения (12) получим $\sin \alpha$

$$\sin \alpha = \frac{y}{y_0}. \quad (13)$$

Аналогично можно вывести при $y=0$

$$\sin \alpha = \frac{x}{x_0}. \quad (14)$$

Список литературы

1. Черных А.Г. Бесконтактное измерение активного и индуктивного сопротивлений соленоида / А.Г. Черных // Физическое образование в вузах, 2014. – Т. 20. – №2. – С. 122–130.
2. Черных А.Г. Бесконтактное измерение электросопротивления проводников в переменном магнитном поле. Ч. 1 / А.Г. Черных // Физическое образование в вузах, 2013. – Т. 19. – №3. – С. 131–137.