ПЕДАГОГИКА

Закирова Нурия Музиповна
канд. техн. наук, доцент
Владыкина Ирина Владимировна
канд. пед. наук, доцент
Бузикова Татьяна Алексеевна
старший преподаватель

ФГБОУ ВПО «Глазовский государственный
педагогический институт имени В. Г. Короленко»
г. Глазов, Удмуртская республика

ИЗ ОПЫТА ПРОВЕДЕНИЯ КУРСА ПО ВЫБОРУ «РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ С ПАРАМЕТРАМИ» ДЛЯ СТУДЕНТОВ БАКАЛАВРИАТА ПО НАПРАВЛЕНИЮ «ПЕДАГОГИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ»

Аннотация*. в данной статье приведён опыт работы преподавателей кафедры математики по проведению курса по выбору со студентами старших курсов бакалавриата по направлению «Педагогическое образование», профиль «Математика и Информатика». Рассматриваемый курс охватывает вопросы решения задач с параметрами разного уровня сложности, что восполнит пробелы в знаниях у выпускников и поможет им в будущей работе. Материал статьи может быть использован и учителями математики при подготовке школьников к ЕГЭ и к олимпиадам.*

Ключевые слова*: функция, свойства функции, график, преобразование графика, задача с параметром, применение компьютера, аналитический метод, функционально-графический метод.*

Начиная с шестидесятых годов на вступительных экзаменах в МГУ стали предлагаться задачи с параметрами. Затем их начали включать в материалы вступительных экзаменов большинства вузов, а теперь – в задания ЕГЭ.

Интерес к задачам с параметрами не случаен. Включение параметра в уравнение, неравенство, в их совокупность или систему вызывает серьёзные трудности логического характера. Задачи с параметрами фактически являются задачами исследовательского типа. Хотя для решения задач с параметрами чаще не требуется специальных знаний, выходящих за рамки школьной программы, необходимость проведения полного, разветвлённого исследования значительно осложняет решение задачи такого вида.

Решение задачи с параметрами обычно требует знания свойств элементарных функций (областей определения, областей значения, областей возрастания и убывания, условий достижения наибольшего и наименьшего значений функции), а также знание свойств равносильных переходов в преобразованиях, умения вести исследование, не упуская никаких возможностей.

Решение уравнений и неравенств с параметрами часто приводит к эвристическим приёмам, так как подход к их решению может быть различным, например, аналитический, графический, логический, комбинирование различных методов. Могут быть использованы и нестандартные подходы: идея симметричности аналитических выражений, применение свойств функции в неожиданных ситуациях, оценка выражений, входящих в уравнение или неравенство. Освоение геометрических приёмов решения задач с аналитическими методами является необходимым и важным этапом в приобретении навыков решения задач с параметрами.

Каждое уравнение с параметром – это краткая запись семейства уравнений, графически – одно параметрическое семейство кривых. Для применения графических методов, конечно, требуется умение исследовать и строить различные графики функций, строить семейства кривых и устанавливать положение кривых, соответствующих данным значениям параметра, а также умение составлять уравнения или системы уравнений и находить из них координаты точек, фигурирующих в задаче. Всё это требует довольно высокой техники исследования.

В статьях [1, 2] приведён опыт работы студенческих спецсеминаров по решению задач с параметрами, где отмечалось, что ежегодно в задания ЕГЭ по математике включаются задачи с параметрами. Их невозможно научиться решать сразу и быстро. Чтобы изучить аналитические и графические методы их решения необходимо систематически обращаться к таким задачам. Ясно, что учитель сам должен владеть соответствующими навыками и совершенствоваться в этом направлении. Основу умения решать задачи с параметрами необходимо закладывать в процессе обучения в институте. Восполнению пробелов и приобретению необходимых знаний в рассматриваемом вопросе способствуют курсы по выбору.

Курсы по выбору по решению задач с параметрами проводятся у студентов, обучающихся по профилю «Математика и Информатика», направление «Педагогическое образование». Программа курса включает решение задач с параметрами от простых до достаточно сложных. Программа также предусматривает рассмотрение различных приёмов и методов, используемых при решении задач с параметрами. Отдельным вопросом изучается функционально-графический метод в задачах с параметрами.

В вышеуказанных статьях приведены примеры как из реальных ЕГЭ, так и из методических материалов по подготовке к ЕГЭ. Эти задания были тщательно проанализированы на занятиях. Причём были разобраны разные подходы, используемые при решении конкретных задач. Каждый раз проводился сравнительный анализ способов решения, отбор наиболее приемлемого решения, здесь же выделялось менее трудоёмкое решение.

Интересным представляется опыт решения задачи из [1]: найти все такие a, что наименьшее значение функции $f(x)=4|x-a|+|x^2+2x-3|$ меньше 4. Заметив, что если при некотором a значения функции $f(x)<4$, то тем более наименьшее значение $f(x)$ будет меньше 4. Далее раскрыв модуль в выражении $|x-a|$ и выразив из уравнения $f(x)=4$ a, можно в плоскости xOa изобразить замкнутую кривую $4|x-a|+|x^2+2x-3|=4$. Точки внутри контура будут удовлетворять неравенству $f(x)<4$. Далее методом сечений с учётом, что граница области не входит в решение, находим $a\in(-4;-1)\cup(-1;2)$.

Эту же задачу можно решить геометрически в системе координат *xOy*, представив исходное неравенство $f(x)<4$ в виде $|x^2+2x-3|<4-4|x-a|$. Изобразив графики левой и правой частей, отмечаем, что неравенство будет иметь решение, если точки уголка выше соответствующих точек графика $y=|x^2+2x-3|$.

Эту же задачу можно решить аналитически, раскрыв оба модуля и записав функцию на каждом из полученных интервалов. Далее с помощью производной следует найти критические точки. В данной задаче они совпадут с абсциссами точек излома графика функции: –3, 1, *a*. В этих точках производная не существует. Далее, решив неравенства $f(1)<4$, $f(-3)<4$, $f(a)<4$ и объединив решения, получим ответ $a\in(-4;-1)\cup(-1;2)$.

Теперь интересно посмотреть на компьютере график самой функции $f(x)$ при разных числовых значениях *a*. При этом чётко видно, что данная функция не во всех точках области определения имеет производную. Наименьшее значение она принимает как раз в точках излома графика функции, там, где производная не существует. Если же в самом начале решения задачи обратиться к компьютеру, тогда естественно выбор будет за последним способом решения задачи.

Применение персонального компьютера, вернее, математических пакетов в графическом исследовании задач с параметрами может значительно облегчить работу. Большие графические возможности пакетов могут оказать незаменимую помощь в разрешении сомнительных ситуаций, дать подсказку или подход к решению задачи. Такая помощь особенно необходима в таких случаях, когда нужно реализовать построение одного или нескольких семейств кривых и областей, полученных от их пересечения, в зависимости от конкретных значений параметров. Среды Mathcad, Maple и другие позволяют в динамике отследить движение кривой семейства до появления характерных для задачи точек, выделить цветом какую-то особенную кривую, найти приближённо координаты точек пересечения и многое другое.

Рассмотрим типичную школьную задачу: найти все значения параметра *p*, при которых все решения неравенства $(p-1)x^2+2px+(p+3)\geq 0$ содержатся в отрезке [–2; 3].

Данную задачу можно решать аналитически, исследуя квадратный трёхчлен. Здесь рассмотрим графическое решение. Перейдём в неравенстве к равенству. Из уравнения легко выразить *p* как функцию от *x*: $p=\dfrac{x^2-3}{(x+1)^2}=1-\dfrac{2x+4}{(x+1)^2}$ (1), где $x\neq -1$. При $x=-1$ данное неравенство $p\cdot 0+2\geq 0$ выполняется всегда. Далее с помощью математического пакета изобразим на плоскости *xOp* множество точек *G*, являющееся решением неравенства. Граница множества задаётся уравнением (1). Чтобы уточнить координаты точки максимума необходимо исследовать производную функции. Вместе с графиком функции следует изобразить и асимптоты $x=-1$ (вертикальная асимптота), $p=1$ (горизонтальная асимптота).

На экране видно, что график состоит из двух ветвей, которые разбивают плоскость *xOp* на три части. Далее, выделив нужную область знакопостоянства функции, следует методом сечений области прямыми $p=p_0$ получить решение неравенства, как проекцию на ось *Ox* отрезка, полученного от пересечения множества *G* с прямой $p=p_0$. При этом в ответ пойдут те значения p_0, для которых проекция выделенного отрезка содержится в промежутке оси *Ox* [–2; 3]. Это будет при $p\leq\dfrac{3}{8}$.

Решать задачу аналитически или графически? Порой трудно ответить на этот вопрос, даже имея опыт решения задач с параметрами.

Рассмотрим задачу: найти все значения параметра *a*, при которых функция $f(x)=|x-a+1|+|x+3a|$ является чётной. Если идти путём определения чётной функции $f(-x)=f(x)$, придём к уравнению $|x+a-1|+|x-3a|=|x-a+1|+|x+3a|$.

В методической литературе такие уравнения, как правило, решаются методом областей на плоскости *xOa*. Изобразив прямые $x+a-1=0$, $x-3a=0$, $x-a+1=0$,

$x+3a=0$, видим, что они разбивают плоскость на одиннадцать частей. В каждой части нужно проверить, удовлетворяют ли координаты точек рассматриваемой части неравенству, если да, то выделить их. Затем методом сечений полученного множества *G* с прямыми $a=a_0$ записать ответ. В данном случае применение такого способа не рационально. Если, например, в среде Mathcad для одного или нескольких значений параметра на экране дисплея посмотреть график данной функции, то сразу возникает идея упрощения решения задачи. График функции является симметричным относительно прямой $x=\frac{(-a+1)+3a}{2}=a+\frac{1}{2}$. Следовательно, положив $a+\frac{1}{2}=0$, т.е. $a=-\frac{1}{2}$, получим график, симметричный относительно оси *Oy*.

Использование математических пакетов рассмотрим ещё на одном примере: определить вид семейства линий, заданных уравнением $(2p-1)x+(p+1)y=p-5$. На первый взгляд задача проста, имеем уравнения прямых. Причём при $p=\frac{1}{2}$ прямая параллельна оси *Ox* ($y=-3$), при $p=-1$ – параллельна оси *Oy* ($x=2$), при $p=5$ – проходит через начало координат ($9x+6y=0$). Записав уравнение в виде $y=\frac{1-2p}{p+1}x+\frac{p-5}{p+1}$ (2) и изобразив на экране компьютера нескольких прямых семейства (2) (при разных значениях параметра), видим, что эти прямые пересекаются в одной точке. Данное уравнение определяет не просто семейство прямых, а пучок прямых. Остаётся найти центр пучка. Это проще всего сделать так. Представить исходное уравнение в виде: $p(2x+y-1)=x-y-5$. Оно определено при $\forall p\in \mathrm{R}$. Далее положить одновременно $2x+y-1=0$, $x-y-5=0$. Решив систему, найдём центр пучка – точку $M_0(2;-3)$.

При решении задач с параметрами графически необходимы хорошие навыки элементарных преобразований графиков функций для того, чтобы представить, каким будет график, соответствующий другому значению параметра по сравнению с первоначально взятым значением. Будущий учитель должен чётко понимать, что при работе с учащимися использование компьютера позволит проиллюстрировать все особенности таких преобразований. Он сможет убедительно показать, что порядок действий, в котором осуществляются преобразования, имеет значение. На конкретном примере учителю целесообразно продемонстрировать, как из графика функции $y = f(x)$ получить график функции $y = f(ax + b)$. При этом построение искомого графика следует осуществить двумя способами: сначала сделать перенос графика $y = f(x)$ вдоль оси Ox на b единиц влево или вправо, а потом сжатие или растяжение полученного графика вдоль оси Ox в a или в $\frac{1}{a}$ раз: $y = f(x) \to y = f(x + b) \to y = f(ax + b)$. Затем построение осуществить в обратном порядке: $y = f(x) \to y = f(ax) \to y = f(ax + b)$.

В результате видно, что полученные графики одной и той же функции не совпадают. Дальнейший анализ со стороны учителя поможет ученикам понять, в чём причина такого несовпадения. Будет сделан вывод: если сначала осуществлять сжатие или растяжение графика $y = f(x)$ вдоль оси Ox, а потом параллельный перенос полученного графика $y = f(ax)$ вдоль оси Ox, то нужно функцию $y = f(ax + b)$ записать в виде $y = f\left[a\left(x + \frac{b}{a}\right)\right]$ и перенос графика $y = f(ax)$ осуществлять не на b единиц, а на $\frac{b}{a}$.

Привлечение математических пакетов к решению задач с параметрами и других задач, требующих построения сложных графиков, трудоёмких вычислений, значительно облегчает процесс поиска решений. Наглядность представления решения задачи вызывает живой интерес студентов и облегчает понимание. В виду большого разнообразия задач с параметрами и сложностью их решения вопросы реализации решения таких задач с помощью математических пакетов выносятся на занятия спецсеминаров. Навык, приобретённый студентами, несомненно, окажется полезным в будущей работе со школьниками старших классов.

Список литературы

1. Закирова Н.М. Задачи с параметрами на занятиях спецсеминара у студентов старших курсов / Н.М. Закирова, В.В. Маев // Современное образование: научные подходы, опыт, проблемы, перспективы: Материалы VII Всероссийской научно-практической конференции с международным участием «Артемовские чтения» / Под общей редакцией доктора педагогических наук, профессора М.А. Родионова. – Пенза, 2011. – Т.1. – С. 49-53.

2. Закирова Н.М. О задании С5 на едином государственном экзамене по математике / Н.М. Закирова // Математический вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона. Выпуск 13: Периодический межвузовский сборник научно-методических работ. – Киров: Изд-во ВятГГУ, 2011. – С. 322-327.