ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ

Сердюк Артем Олегович
студент
Смирнов Роман Станиславович
студент
Сазонов Никита Максимович
студент
Долгова Галина Борисовна
доцент

ФГАОУ ВО «Нижегородский государственный
университет им. Н.И. Лобачевского
г. Нижний Новгород, Нижегородская область

РАЗРАБОТКА АЛГОРИТМА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ О НАЗНАЧЕНИЯХ

Аннотация*: в данной статье рассмотрен и описан принципиально новый алгоритм решения задачи о назначениях небольшой размерности.*

Ключевые слова*: алгоритм, задача.*

Задача о назначениях является частным случаем транспортной задачи. Транспортная задача – задача о наиболее экономном плане перевозок однородного или взаимозаменяемого продукта из пункта производства (станций отправления), в пункты потребления (станции назначения) – является важнейшей частной задачей линейного программирования, имеющей обширные практические приложения не только к проблемам транспорта.

В общей форме задача о назначениях формируется следующим образом:

Имеется некоторое число работ и некоторое число исполнителей. Любой исполнитель может быть назначен на выполнение любой (но только одной) работы, но с неодинаковыми затратами. Нужно распределить работы так, чтобы выполнить работы с минимальными затратами.

При решении некоторых задач менеджмента приходится назначать исполнителей (людей, механизмы и т.п.) для выполнения некоторых однотипных работ. Для этого и используется задача о назначении.

Задачу о назначениях можно кратко сформулировать следующим образом. Задано n работ, каждую из которых может выполнить любой из n исполнителей. Стоимость выполнения работы i исполнителем j равна Cij. Нужно распределить исполнителей по работам, т.е. назначить одного исполнителя на каждую работу, таким образом, чтобы минимизировать общие затраты.

Общая задача назначения n работников n работ представлена в таблице 1.

Таблица 1

Работа

		1	2	…	n	
	1	C_{11}	C_{12}	…	C_{1n}	1
Работники	2	C_{21}	C_{22}	…	C_{2n}	1
	…	…	…	…	…	…
	n	C_{n1}	C_{n2}	…	C_{nn}	1
		1	1	…	1	

Для решения задачи о назначениях был разработан следующий алгоритм. Разберем его на примере следующей задачи. Требуется распределить 4 вида работ среди 4 работников так, чтобы сумма денег на оплату рабочих была минимальна. Ниже приведена матрица затрат, в тысячах рублей.

Таблица 2

	A	B	C	D
1	1	4	6	3
2	9	7	10	9
3	4	5	11	7
4	6	7	8	9

Шаг 1.

Распределим работников по работам. Например, первый работник будет выполнять первую работу, второй – вторую и т.д.

$$\begin{array}{ccccc} iJay & A & B & C & D \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Если X_{ij}= 1, i-ый работник выполняет j-ую работу.

Если X_{ij}= 0, i-ый работник не выполняет j-ую работу.

Очевидно, что любое из возможных решение, в том числе оптимальное, мы можем получить в результате обмена работ между работниками.

Будем производить обмен пока не найдем оптимальное значение, то есть не найдется двух таких работников, обмен работами между которыми дал бы уменьшение суммы выплат.

Сопоставим матрицу затрат и матрицу распределения работ.

	A	B	C	D
1	1 1	4 0	6 0	3 0
2	9 0	7 1	10 0	9 0
3	4 0	5 0	11 1	7 0
4	6 0	7 0	8 0	9 1

Шаг 2.

Найдем все варианты обмена работами. Так как наша матрица размера n×n количество возможных обменов составляет (n-1)!=6.

1	1->2	8	13	-5
2	1->3	12	10	2
3	1->4	10	9	1
4	2->3	18	15	3
5	2->4	16	16	0
6	3->4	20	15	5

Во втором столбце указано направление обмена (к примеру, в первой строке, первый работник меняется работой с вторым), в третьем столбце – сумма затрат на двух работников до обмена, в четвертом – сумма после, в пятом – разница суммы выплат до обмена и после. Очевидно, что если сумма выплат до обмена больше чем после, то такая перестановка выгодна в рамках решения задачи. И наоборот.

Найдем максимальное положительное значение в пятом столбце. Это обмен между 3 и 4 работником. Поменяем работы между этими исполнителями. Для наглядности построим новую матрицу распределения.

$iJay$	A	B	C	D
1	1	0	0	0
2	0	1	0	0
3	0	0	0	1
4	0	0	1	0

Повторим второй шаг. Найдем варианты обмена, при которых значение целевой функции уменьшится. Это обмен между первым и третьим работником.

1	1->2	8	13	-5
2	1->3	8	7	1
3	1->4	9	12	-3
4	2->3	14	14	0
5	2->4	15	17	-2
6	3->4	15	20	-5

Построим новую матрицу распределения

$i\backslash j$	A	B	C	D
1	0	0	0	1
2	0	1	0	0
3	1	0	0	0
4	0	0	1	0

Проверим, найдено ли оптимальное значение.

1	1->2	10	13	-3
2	1->3	7	8	-1
3	1->4	11	15	-4
4	2->3	11	14	-3
5	2->4	15	17	-2
6	3->4	12	17	-5

В пятом столбце положительных значений нет. Это означает, что мы не сможем обменять работы между работниками, без ущерба для значения целевой функции. Оптимальное распределение найдено.

В качестве заключения нужно отметить, что данный алгоритм обладает рядом недостатков. В первую очередь это касается трудоемкости, равной O(N!). Очевидно, что при значениях количества работ/работников выше 10 задача будет решаться очень долго, даже с помощью автоматизации на ЭВМ. Тем не менее, данный алгоритм может легко применяться для ручного решения небольшой задачи, размерность до 4×4 включительно.

Список литературы

1. Таха Хемди А., Введение в исследование операций, 7-е издание: Пер. с англ. – М.: Вильямс, 2005

2. Г. Вагнер, Основы исследования операций: – М.: Мир, 1972. – Том 1, 6.4. Модель назначений.