ПЕДАГОГИКА ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ШКОЛЫ

Карельский Василий Николаевич

преподаватель

ФГКОУ «Оренбургское президентское

кадетское училище» Минобороны РФ

г. Оренбург, Оренбургская область

РЕШЕНИЕ НЕСТАНДАРТНЫХ И ОЛИМПИАДНЫХ ЗАДАЧ ПО МАТЕМАТИКЕ

Аннотация: *в данной статье описано решение ряда олимпиадных задач по математике, которые для большинства школьников являются нестандартными. Это задачи арифметического, алгебраического и геометрического плана, задачи с элементами комбинаторики. Объединяет их использование нестандартных методов и приемов в основе решения.*

Ключевые слова: *занимательная математика, олимпиадные задачи.*

Принято считать, что математика – сухая наука, мир формул и цифр, непостижимый для многих. Как оправдание, мы часто слышим миф о людях с нематематическим, гуманитарным складом ума. Однако математика – не бессмысленная зубрежка, не заучивание формул, а развитие интеллекта [1].

Хорошим материалом для развития интеллекта, на наш взгляд, являются нестандартные и олимпиадные задачи по математики. Рассмотрим различные по тематике и уровню сложности задания, которые могут быть интересными для учащихся 8–11 классов.

Задание 1. Цифры написаны на карточках и расположены в два ряда, как показано ниже.

9	1	4	5
2	3	7	8

Рис. 1

Поменяйте местами две карточки так, чтобы сумма четырёх чисел в каждой строке была одинаковой.

Решение:

Все 16 вариантов осмысленной замены не приводят нас к цели …. если только … не «жульничество»!

9	1	4	5
2	3	7	8

8	1	4	5
2	3	7	6

Рис. 2

Задание 2. Двое из трех ребят Антон, Борис и Петр ведут боксёрский поединок друг с другом на ринге.

1. Тот, кто ниже ростом из пары Антон и Борис – тот старший боец на ринге.

2. Младший из пары Борис и Пётр – боец на ринге меньшего роста.

3. Самый высокий в паре Антон и Пётр – младший боец на ринге.

Так кто же сражается в ринге?

Решение:

Рассмотрим каждую из трёх возможных афиш поединка.

Антон против Петра

Тогда из первого условия следует, что Антон *старше* Петра.

Из третьего условия следует, что Петр *выше ростом* Антона.

Но из второго условия следует, что Петр *ниже ростом* Антона. Получили противоречие.

Дамы и господа этот бой Вы увидите в другой раз!

Пётр против Бориса

Из первого условия получаем, что Борис старше Петра и Борис *ниже ростом* Антона.

Из второго условия получаем, что Пётр *ниже ростом* Бориса. Отсюда вытекает, что Антон *самый высокий* из ребят. Но тогда по третьему условию он должен быть на ринге. Получили вновь противоречие.

Нетрудно проверить, что все три условия выполняются для единственно оставшегося варианта боя.

Антон против Бориса

Задание 3. Какое наименьшее значение может принять выражение?

$$3a^2+4ab+4b^2+4a+3$$

Решение:

Выделим квадрат однородного двучлена и квадрат двучлена относительно а.

$3a^2 + 4ab + 4b^2 + 4a + 3 = a^2 + 4ab + 4b^2 + 2a^2 + 4a + 3 =$

$= (a + 2b)^2 + 2(a + 1)^2 + 1$

Теперь ясно, что Min f(a, b) = 1 и достигается он при a = -1, b = 0,5.

Ответ: 1.

Задание 4. Старец

Один старец прожил менее 100 лет, но на вопрос о своем возрасте любил отвечать только «да» или «нет». Сколько вопрос ему надо задать, чтобы узнать его возраст?

Решение

Из соображений здравого смысла неопределенность в возрасте старца можно сразу уменьшить, ибо какой это старец моложе 50-ти?

Итак, старцу не менее 50, но меньше 100 лет.

Вопрос 1: «Вы прожили менее 75 лет?». Этот вопрос уменьшает неопределенность возраста старца вдвое и располагает его в интервале 25 лет.

Если ответ «нет», то следующий вопрос 2: «Вы прожили менее 87,5 лет?» и неопределенность возраста снова уменьшается вдвое и он располагается в интервале 12,5 лет.

Ответ «нет» – вопрос 3: «Вы прожили менее 93,75 лет?», «да» – вопрос 3: «Вы прожили менее 81,25 лет?».

И т.д. аналогично, после вопроса n возраст почтенного мужа определяется с точностью до $\frac{50}{2^n}$ => при $n \geq 6$ $\frac{100}{2^n} < 1$ => достаточно 6 вопросов, чтобы узнать возраст старца.

Задание 5. Точное время

В пять часов x минут ($0 \leq x < 60$) угол между часовой и минутной стрелками составляет 4°. Найдите x.

Решение:

Угол в 4° между стрелками равен $\frac{60}{360} \cdot 4 = \frac{2}{3}$ циферблатным минутам. Ясно, что при полном обороте минутная стрелка составит с часовой угол в 4° дважды. Пусть стрелки часов составляют указанный угол, и минутная указывает на x минут, т.е. она совершила $\frac{x}{60}$ часть своего оборота, следовательно, часовая стрелка проделала своего пути от 25 к 30 минутам. Получаем уравнение:

$$x \pm \frac{2}{3} = 25 + 5 \cdot \frac{x}{60}$$

$$\text{т.е. } 55x = 25 \cdot 60 \mp 40 \quad \leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x = 28 \\ x = 26\frac{6}{11} \end{array} \right.$$

Ответ: 28 минут или $26\frac{6}{11}$ минут.

Задание 6.

Мощность цеха сборки составляет 100 изделий А или 300 изделий Б в сутки. Отдел технического контроля в сутки может проверить не более 150 изделий. Изделие А стоит вдвое дороже изделия Б. Сколько изделий обоих типов следует выпускать в сутки, чтобы общая стоимость продукции была максимальной?

Решение:

Пусть цех будет выпускать x изделий типа Б в сутки. На это он потратит $\frac{x}{300}$ часть своих суточных мощностей, следовательно, сможет выпустить ещё $100 \cdot (1 - \frac{x}{300})$ изделий типа А за сутки, то есть $100 - \frac{x}{3}$ изделия.

Технический контроль дает ограничение:

$$x + 100 - \frac{x}{3} \le 150$$

$$x \le 75$$

Если стоимость 1 изделия типа Б c (c >0), то функция стоимости имеет вид

$$f(x) = c \cdot x + 2c \cdot (100 - \frac{x}{3})$$

$$f(x) = c \cdot (200 + \frac{x}{3})$$

Следовательно, наибольшая выгода достигается при наибольшем возможном x, т.е. при x = 75.

$$f(75) = c \cdot 225 \qquad 100 - \frac{75}{3} = 75$$

Следовательно, цех должен выпускать по 75 изделий обоих типов в сутки.

Задание 7.

Билл и Дэн вместе разводят крупный рогатый скот. Однажды они решили продать всех коров и купить овец. На рынке им дали за каждую корову столько долларов, сколько голов было в их стаде. На все полученные деньги они купили овец по 10 долларов за голову, а на оставшиеся деньги купили барана. По дороге *домой они поссорились и решили разделить скот, но число овец пополам не делилось. Тогда Билл забрал последнюю овцу себе, а Дэну отдал барана. Но Дэн сказал, что он получил меньше, так как баран стоит меньше овцы. Тогда Билл отдал ему еще свой кольт. Сколько стоит кольт?*

Решение:

Пусть у Билла и Дэна было n коров => на рынке они выручили n^2 долларов. Если куплено 2k – 1 овец и баран по цене m (m < 10) долларов, стоимость кольта x долларов, то получаем

$n^2 = 10(2k-1) + m$ (*) => $m \in N$, , (условие «купли-продажи»)

и 10к – x = 10(k-1) + m + x (условие честного раздела имущества «друзей – не разлей вода»)

т.е. 2x = 10 – m

Из (*) =>, что m последняя цифра квадрата натурального числа. Значит m = 1;4;5;6;9.

(*) <=> $2x = 20k - n^2$

Если m=1 то 2x=9 и получим уравнение $9 = 20k - n^2$ => n – нечётное,

т. е. n=2p-1, $p \in N$. Но тогда имеем $10 = 20k - 4p^2 + 4p$. Это уравнение не имеет решений в целых числах, т. к. 10 не делится на 4.

Если m=4 то 2x=6 и $6 = 20k - n^2$ => n – чётное, т. е. n=2p, $p \in N$. Но тогда имеем $6 = 20k - 4p^2$. Это уравнение не имеет решений в целых числах, т. к. 6 не делится на 4.

Если m=5 то 2x=5 и $5 = 20k - n^2$ => n – нечётное, т. е. n=2p-1, $p \in N$. Но тогда имеем $6 = 20k - 4p^2 + 4p$. Это уравнение не имеет решений в целых числах, т.к. 6 не делится на 4.

Если m=6 то 2x=4 и $4 = 20k - n^2$ Это уравнение имеет решения в натуральных числах, например k=10 & n=14. Значит, кольт может стоить 2 $.

Если m=9 то 2x=1 и получим уравнение $1 = 20k - n^2$=> n – нечётное,

т. е. n=2p-1, $p \in N$. Но тогда имеем $2 = 20k - 4p^2 + 4p$. Это уравнение не имеет решений в целых числах, т. к. 2 не делится на 4.

Итак, кольт может стоить только 2 $.

Ответ: 2 $.

Задание 8.

У продавца заведомо неточные весы (коромысла весов разной длины). Зная это, продавец отвешивает каждому покупателю половину товара на одной чашке весов, а половину – на второй чашке, думая, что этим он компенсирует неточность весов. Так ли обстоит дело в действительности?

Решение:

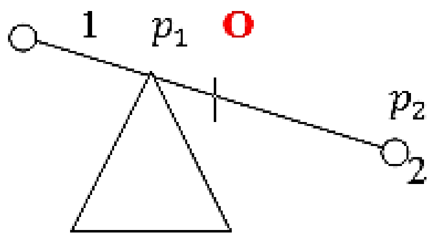

Рис. 3

Пусть коромысла весов имеют длину p_1 и p_2, причем $p_2 > p_1$. Если положить мерных гирь на массу m в чашу 2 и некоторое количество товара массой x в чашу 1 так, чтобы весы были в равновесии, т.е. центр масс находился в точке O, то получим равенство

$$\frac{m}{x} = \frac{p_1}{p_2}\text{, т.е. } x = m\frac{p_2}{p_1}.$$ (Правило рычага)

Проделав «компенсирующую» смену, т. е. мерные гири на массу m – в чашу 1, некоторое количество товара массой y – в чашу 2 так, чтобы весы были в равновесии, получим $\frac{m}{y} = \frac{p_2}{p_1}$, т.е. $y = m\frac{p_1}{p_2}$.

Следовательно, заявленная продавцом «масса» равна *2m*, а реально отпущенная

$$x + y = m\frac{p_2}{p_1} + m\frac{p_1}{p_2} = m(\frac{p_2}{p_1} + \frac{p_1}{p_2}) \qquad (\frac{a}{b} + \frac{b}{a} > 2 \quad a, b > 0 \quad a \neq b)$$

$$x + y > 2m$$

будет больше!

Задание 9.

Каково наименьшее число кругов, которыми можно покрыть круг вдвое большего радиуса?

Решение:

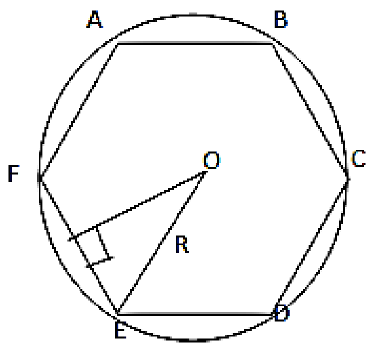

Рис. 4

Рассмотрим больший круг с центром в точке О и радиусом R. Впишем в его окружность правильный шестиугольник ABCDEF. Известно, что его сторона равна R. Ясно, что любые *три* из точек A, B, C, D, E, F, O не могут принадлежать одному кругу с радиусом $\frac{R}{2}$, ведь даже описанная около соответствующего треугольника окружность имеет радиус $\geq \frac{R}{\sqrt{3}} > \frac{R}{2}$. Значит, для покрытия необходимо не менее 7 кругов радиуса $\frac{R}{2}$. (Для покрытия всех сторон ABCDEF и точки О).

Легко показать, что 7 кругов будет достаточно. Как писали древнеиндийские математики: «У кого глаза есть, тот сам поймёт!»

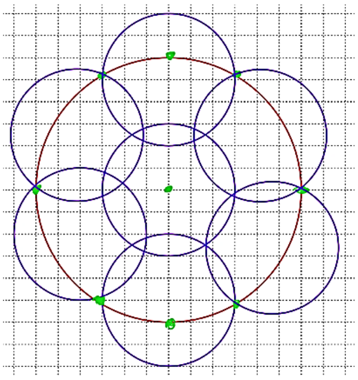

Рис. 5

Ответ: 7

Список литературы

1. Севрюков П.Ф. Подготовка к решению олимпиадных задач по математике [текст] / П.Ф. Севрюков: Изд. 2-е. – М.: Илекса, Народное образование; Ставрополь: Сервисшкола, 2009. – 112 с.