

## ЕСТЕСТВЕННЫЕ НАУКИ

*Аврелькин Владимир Александрович*

д-р. техн. наук, профессор  
ФГОУ ВПО «Чувашский государственный  
университет им. И.Н. Ульянова»  
г. Чебоксары, Чувашская Республика

### **АНАЛИЗ МОДЕЛИ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЙ НЕСЖИМАЕМОЙ СРЕДЫ**

*Аннотация:* в данной статье автором приведены данные, полученные в результате анализа модели упругопластических деформаций несжимаемой среды. Акцентировано разделение деформаций на обратимые и необратимые как основная проблема теории конечных упругопластических деформаций. Рассмотрена модель Прандтля–Рейса.

*Ключевые слова:* анализ, упругопластические деформации, модель Прандтля–Рейса, обратимые деформации, необратимые деформации.

Накопление необратимых деформаций при деформировании твердых тел связано с рядом взаимозависимых процессов, которые определяются зависимостью диссипации энергии от скорости протекания процесса и связывается с проявлением вязкостных свойств материалов [1], а также ростом необратимых деформаций, связанный со структурными изменениями в материалах. Такое свойство материалов накапливать необратимые деформации называют пластичностью [2].

Деформации в теле следует разделять на обратимые и необратимые. В случае, когда необратимые деформации превалируют, обратимыми пренебрегают, рассматривая деформирование реального тела. При этом приходится пренебрегать и упругим откликом деформируемого тела на внешние усилия. Данное упрощение реальных свойств материалов, безусловно, определяется стремлением использовать в теории наиболее простой математический аппарат.

В случае, когда протекающие в деформируемом теле процессы существенно зависят от упругих свойств материала и пренебречь ими не возможно, используют положение о малости как упругих, так и пластических деформаций [3], то есть ограничиваются рамками модели Прандтля–Рейса.

Различные попытки усложнения модели с целью учесть отклонения от идеального характера пластического течения предпринимались неоднократно [4]. Предпринимались также попытки учесть температурные эффекты, вязкоупругие эффекты в теории пластического течения. И все же проблема моделирования больших необратимых деформаций на фоне присутствующих обратимых остается актуальной.

В работе Немат–Нассера [5] в качестве исходного принимается аддитивное разложение вектора перемещений  $u$  на упругую  $u_{ynp}$  и пластическую  $u_{nl}$  составляющие:  $u = u_{ynp} + u_{nl}$ .

Задача же стоит в разработке модели конечных упругопластических деформаций, в основу которой заложены упругие и пластические деформации вполне конкретных дифференциальных уравнений переноса и принятии идеального характера пластического течения, при этом основной упрощающей гипотезы при построении простейшего варианта теории является предположении о независимости свободной энергии от необратимых деформаций.

Основной проблемой теории конечных упругопластических деформаций является разделение деформаций на обратимые и необратимые. Одним из условий такого разбиения может быть требование, чтобы при уменьшении деформаций следовало основное соотношение модели малых упругопластических деформаций Прандтля–Рейса:

$$E_{ij} = \frac{1}{2}(u_{nl} + u_{ynp}) = e_{ij}^{ynp} + e_{ji}^{nl} \quad (1)$$

Здесь  $E_{ij}$  – тензор малых деформаций, который равен сумме упругих  $e_{ij}^{nl}$  и пластических  $e_{ji}^{ynp}$  деформаций.

Полные деформации могут быть измерены в эксперименте, в то время как обратимые и необратимые деформации таким способом не измеримы. Выходит, само их введение служит только целям математического моделирования реального процесса. То есть, разделение деформаций на обратимую и необратимую части, является необходимым элементом идеализации реального процесса деформирования.

В теории пластического течения формулируется предельное соотношение – функция нагружения:

$$f(\sigma_{ij}, p_{ij}, x_i) = n \quad (2)$$

где  $x_i$  – величина, характеризующая зависимость изменения функции нагружения от пути нагружения;

$p_{ij}$  – тензор;

$n$  – постоянная материала.

Обратимое деформирование происходит, пока в каждой его точке напряженное состояние не достигает поверхности нагружения, которая отделяет область упругого деформирования материала от области, где появляются пластические деформации.

Из принципа максимума Мизеса следует, ассоциированный закон пластического течения – закон направленности приращения пластической деформации (или скорости пластической деформации) по градиенту к поверхности нагружения:

$$\varepsilon_{ij}^p = \alpha \frac{df}{d\sigma_{ij}}, \quad \alpha = \alpha(\varepsilon_{ij}^p, p_{ij}, x_i).$$

### **Список литературы**

1. Белоносов С.М. Анализ начально-краевых задач теории линейной вязкоупругости // в сб. «Прикл. задачи механики деформируемых сред». – Владивосток, 1991. – С. 21–39.
2. Соколовский В.В. Теория пластичности. – М.: Высш. шк., 1969. – 608 с.

3. Бережная И.А., Ивлев Д.Д. Об интегральных неравенствах теории упругопластического тела // Прикладная математика и механика. – Вып. 3. – 1980. – С. 540–549.

4. Бердичевский В.Л., Седов Л.И. Динамическая теория непрерывно распределенных дислокаций. Связь с теорией пластичности // Прикл. математика и механика. – Вып. 31. – №6. – 1967. – С. 98–100.

5. Nemat-Nasser S. Decomposition of strain measures and their rates in finite deformation elastoplasticity // Int. J. Solids and struct. – 1979. – №2. – P. 155–166.

6. Полоник М.В. Остаточные напряжения у одиночных каверн в упругопластических телах и их влияние на повторное нагружение [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.dslib.net/mechanika-deformacii/ostatochnye-naprjazhenija-u-odinochnyh-kavern-v-uprugoplasticheskikh-telah-i-ih-vlijanie.html>