ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ

Лапшин Дмитрий Дмитриевич
канд. техн. наук, доцент
ФГБОУ ВПО «Воронежский государственный
технический университет»
г. Воронеж, Воронежская область
Меерсон Вера Эдуардовна
канд. техн. наук, доцент
ФГБОУ ВО «Воронежский государственный лесотехнический
университет им. Г.Ф. Морозова»
г. Воронеж, Воронежская область

ОБОСНОВАНИЕ ПРИНЦИПОВ УПРАВЛЯЕМОСТИ ТЕХНИЧЕСКОЙ СИСТЕМОЙ НА ОСНОВЕ ДЕКОМПОЗИЦИОННОГО ПОДХОДА

Аннотация*: в работе рассматривается возможность применения метода декомпозиции для анализа поведения сложных технических систем. Авторами сформулировано и обосновано определение управляемости системой.*

Ключевые слова*: декомпозиция, подсистема, отношения, множество, управляемость, воспроизводимость.*

Для того, чтобы оценить насколько система в целом управляема введем понятие функционала качества. Предположим, что некоторая система определяется явным образом с помощью некоторого отношения n-го порядка

$$R[X_1,...,X_n] \qquad (1)$$

Общий метод декомпозиции можно описать с помощью операции умножения отношений. Отношение называется произведением отношений R_1 и R_2, если выполняется условие

$$(xRy) \leftrightarrow [(xR_1z) \cap (zR_2y)]. \qquad (2)$$

Общий метод декомпозиции состоит в том, чтобы представить отношение системы R в виде произведения двух других отношений R_1 и R_2. После того как два таких отношения найдены, систему можно представить как совокупность двух подсистем

$$\begin{aligned}&R_1[X_1,...,X_j,Z],\\&R_2[Z,X_{j+1},...,X_n].\end{aligned} \tag{3}$$

Рассмотрим задачу: каков наименьший порядок отношения подсистем, на который можно разложить многоместное отношение n-го порядка из уравнения (2). Решение этой задачи представим в виде теоремы.

Теорема. Систему n-го порядка можно: 1. Разложить на (n-2) трехместных отношения $\{R_1, R_2, \ldots, R_n\}$. 2. Разложить на двухместные отношения тогда и только тогда, когда любое трехместное отношение, полученное в соответствии с первым утверждением, удовлетворяет условиям

$$\begin{aligned}&[X_iR_j(X_{i+1},X_{i+2})]\leftrightarrow\left\{\left(X_iR_j^1Z_j\right)\cap\left[Z_jR_j^2(X_{i+1},X_{i+2})\right]\right\}\\&Z_j=X_{i+1}\cap X_{i+2}\end{aligned} \tag{4}$$

Доказательство: Первое утверждение теоремы можно доказать, построив соответствующее разложение. Представим отношение R системы в виде произведения двух других отношений R_1 и R_2

$$R=R_1 / R_2,\ [R_1(Z_1,X_2,X_3)]\cap[R_2(X_1,Z_1,X_4,...,X_n)] \tag{5}$$

Поскольку вместе с новыми отношениями R_1 и R_2 ввели новый терм Z_1, на выбранные отношения можно не накладывать никаких ограничений, и, следовательно, такая декомпозиция вполне возможна.

Представим затем R_2 в свою очередь как произведение отношений

$$R_2=R_3 / R_4. \tag{6}$$

Тогда

$$\begin{aligned}&[R_1(Z_1,X_2,X_3)]\cap[R_3(Z_2,Z_1,X_4)]\cap\\&\cap[R_4(Z_2,X_1,X_5,...,X_n)]\end{aligned} \tag{7}$$

Продолжая этот процесс, получим

$$R_{2(k-1)} = R_{2(k-1)+1} / R_{2(k-1)+2}; \quad k = 1...(n-3),$$

$$\begin{gathered}[R_1(Z_1, X_2, X_3)] \cap [R_3(Z_2, Z_1, X_4)] \cap ... \\ \cap [R_{2(n-4)+1}(Z_{n-3}, Z_{n-4}, Z_{n-2})] \cap \\ \cap [R_{2(n-4)+2}(Z_{n-3}, X_1, X_n)].\end{gathered} \tag{8}$$

Как и раньше, на вводимые отношения не накладывается никаких ограничений и поэтому разложение возможно, а выражение (8) содержит ровно (n-2) трехместных ограничений. Для доказательства второго утверждения рассмотрим, одну из подсистем отношения (8). Пусть

$$R_j(Y_j^1, Y_j^2, Y_j^3) \tag{9}$$

где Y_j^1, Y_j^2, Y_j^3 – соответствующие термы. Запишем R_j – в виде следующего произведения отношений:

$$\begin{gathered}R_j = R_j^1 / R_j^2, \\ [R_j^1(Z^1, Y_j^3)] \cap [R_j^2(Z^1, Y_j^1, Y_j^2)].\end{gathered} \tag{10}$$

Предположим, что условие (4) выполнено и обозначим промежуточный терм через Y_j^2. Тогда

$$\begin{gathered}[R_j^1(Y_j^2, Y_j^3)] \cap [R_j^2(Y_j^2, Y_j^1, Y_j^2)] = \\ = [R_j^1(Y_j^2, Y_j^3)] \cap [R_j^2(Y_j^1, Y_j^2)].\end{gathered} \tag{11}$$

Следовательно, подсистему R_j удалось разложить на два двухместных отношения. Поскольку такое раз¬ложение возможно для всех j, вся система в целом разлагается на 2(n-2) подсистем двухместных отношений. Это доказывает достаточность условий теоремы. Для того чтобы показать их необходимость, предположим, что существует трехместное отношение, для которого промежуточный терм не совпадает ни с одним из трех термов исходного отношения.

Тогда:

$$R_j(Y_j^1, Y_j^2, Y_j^3)$$
$$R_j = R_j^1 / R_j^2, \tag{12}$$
$$[R_j^1(Y_j^1, Z^1)] \cap [R_j^2(Z^1, Y_j^2, Y_j^3)].$$

здесь Z^1 – это новый терм и, следовательно, второе отношение трехместно. Таким образом, представление исходного отношения в виде произведения двух других R_j^1 и R_j^2 не изменило максимального порядка отношения, поскольку R_j^2 тоже трехместно, что и требовалось доказать. То есть, система высшего порядка не может быть разложена на подсистемы с менее чем трехместными отношениями [1].

Рассмотрим систему, осуществляющую отображение семейства множества X_2 на множество элементов X_1, т. е.

$$X_1 R X_2(t). \tag{13}$$

Второй элемент отношения обозначен через $X_2(t)$. Такое обозначение уточняет, что элементами этого множества являются функции времени. Предположим, что множества $x_2(t) \in X_2(t)$ конечны и содержат по p элементов. Предположим теперь, что элементы $x_2(t)$ упорядочены:

$$x_2(t) = [x_2(t_1), x_2(t_2), ..., x_2(t_p)] \tag{14}$$

Тогда отношение системы (13) имеет вид

$$x_1 R[x_2(t_1), x_2(t_2), ..., x_2(t_p)] \tag{15}$$

Рассмотрим теперь подмножество всех элементов $X_2(t)$ с индексом, большим j

$$x_2^j(t) = [x_2(t_{j+1}), ..., x_2(t_n)]. \tag{16}$$

Тогда отношение (13) эквивалентно следующему отношению

$$x_1 R[x_2^j(t), x_2^{jr}(t)] \tag{17}$$

где $x_2^{jr}(t)$ состоит из оставшихся элементов $x_2(t)$

$$x_2^{jr}(t) = [x_2(t_1),...,x_2(t_j)] \tag{18}$$

Представим теперь R в виде произведения отношений |

$$\begin{aligned} &X_1 R_1[X_2^j(t), Z^j], \\ &Z^j R_2 X_2^{jr}(t). \end{aligned} \tag{19}$$

Терм X_1 зависит от промежуточного терма Z и не зависит от элементов $X_2(t)$, у которых индексов меньше j. Рассмотрим сначала один из вариантов поведения системы. Затем, исследуя значения термов системы, можно определить, является ли такое поведение системы допустимым или нет [2]. С технической точки зрения это означает, что вводится некоторое отображение X_3 на множестве действительных чисел Q

$$\left\{X \xrightarrow{R} Y\right\} \xrightarrow{T} Q. \tag{20}$$

Система называется управляемой относительно множества Q_c тогда и только тогда, когда для каждого $q_j \in Q_c$ существует некоторое $x_j \in X$ такое, что

$$\left\{x_j \xrightarrow{R} y_j\right\} \xrightarrow{T} q_j, \tag{21}$$

где x_j – величина на входе системы, а y_j – величина на ее выходе [1].

Отображение T обычно определяет некоторый оптимальный режим, соответствующий наилучшему качеству системы, которое можно достичь, не накладывая на систему никаких ограничений. Система управляема, если $Q_c = \left\{q_{onm}, \;\; q_{onm} + \alpha\right\}$. Система не управляема, если для всех

$x \in X; q > (q_{onm} + \alpha)$. Другое свойство абстрактной системы связано с ее способностью воспроизводить на выходе заданные воздействия.

Воспользуемся следующим определением:

Система называется воспроизводящей относительно множества $Y_r \subset Y_S$, если существует некоторое подмножество $Y_{rd} \subset Y_r$, такое, что:

1) Y_{rd} всюду плотно в Y_r;

2) для каждого $y_j \in Y_{rd}$ существует некоторое $x_j \in X$ такое, что $y_j = T(x_j)$, например, если

$$\begin{gathered} \exists x_j \wedge y_j \left\{ \left[\left(x_j \in X_S \right) \cap \left(y_j \in Y_{rd} \right) \right] \leftrightarrow \right. \\ \left. \leftrightarrow \left[y_j = T\left(x_j \right) \right] \right\} \end{gathered} \tag{22}$$

Требование плотности искомого подмножества в *Y*, относительно которого определяется воспроизводимость системы, вводится для того, чтобы нельзя было считать воспроизводящей систему, генерирующую лишь множество изолированных точек пространства выходных величин $Y_S \cdot$.

Список литературы

1. Тер-Крикоров, А.М. Оптимальное управление и математическая экономика / А.М. Тер-Крикоров. – М.: Наука. – 1977. – 64 с.

2. Ларичев О.И. Объективные модели и субъективные решения / О.И. Ларичев. – М.: Наука, 1987. – 90 с.

3. Шаракшанэ А.С. Сложные системы / А.С. Шаракшанэ, И.Г. Железнов, В.А. Иваницкий. – М.: Высшая школа, 1977. – 110 с.