ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ

Васильченко Александр Николаевич
практикующий специалист, старший преподаватель,
д-р философии по математике
ФГБОУ ВПО «Самарский государственный
технический университет»
г. Самара, Самарская область

ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ ИСПРАВЛЕНИЯ ОШИБОК КОНЕЧНЫМ АВТОМАТОМ

Аннотация*: автор отмечает, что, описывая системы конечными автоматами и кодируя их выходные сигналы избыточными кодами с помощью свёрточных преобразований, можно восстановить первоначальный код систем. В представленной статье рассматривается работа конкретной реализации свёрточных алгоритмов.*

Ключевые слова*: система, конечный автомат, расстояние Хамминга, свёрточный кодировщик.*

Системы являются множествами каких-либо взаимодействующих или взаимозависимых процессов в любых областях деятельности и окружающего мира. Поэтому огромное значение имеют знания, позволяющие контролировать, управлять работами систем. Для этого системы описываются конечными автоматами, синтез которых и конкретная реализация в виде устройства контроля даёт возможность управлять всей работой систем. При передаче кода от реализованного устройства может происходить искажение сигналов, дающих информацию о передаваемом коде, поэтому восстановление кода с помощью добавления в код избыточных битов позволяет выявлять и восстанавливать ошибочные биты кода. Существующие способы избыточного кодирования, использующие кодирование Хамминга, Рида-Соломона, турбо кодирование, LDPC коды низкой плотности с проверкой полярности, имеют свои преимущества при разных физических способах передачи. В высокоскоростных сетевых системах преимущественно используется свёрточное кодирование и комбинированные с ним методы. В статье рассматривается конкретная реализация алгоритма свёрточного кодирования и обсуждается конкретные границы его применения.

Допустим, что некоторая система описывается конечным автоматом, выходные сигналы которого описываются бинарным последовательным кодом Out. Преобразуем его, добавив избыточный код длины l битов, в общем случае для k посылаемых битов, вычисляемый так:

$$X_i = XOR_{j=1}^{N} c_{ij} Out_j,$$

где c_{ij} бинарные коэффициенты [1, с. 217]. Такое преобразование реализуется устройством, называемым свёрточным кодировщиком, синтезированным на элементах бинарной логики, например, для N = 2, k = 1, l = 1 используется всего 2 триггера образующих сдвиговый регистр, изображённые на рисунке 1 квадратами и двумя элементами XOR:

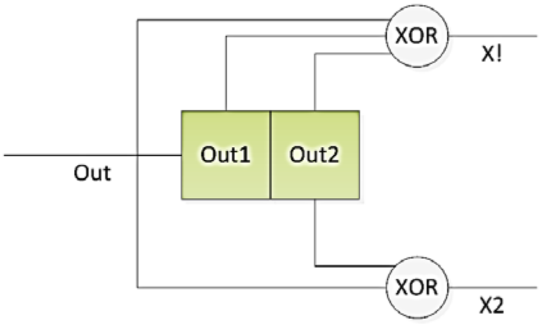

Рис. 1

Здесь $X_1 = Out \oplus Out_1 \oplus Out_2$, $X_2 = Out \oplus Out_2$.

Устройство имеет всего 4 состояния и его работа описывается конечным автоматом, изображённым на рисунке 2, который начинает работу с состояния A, что соответствует нулевым значениям на выходах обеих триггеров.

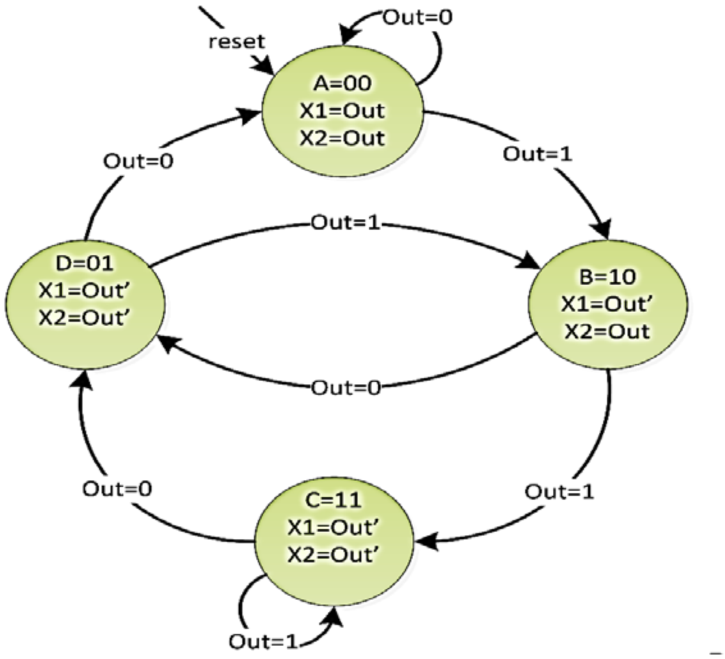

Рис. 2

На выходе каждого состояния значения X_1 и X_2. Например последовательность битов 110101001000 кодируется в последовательность 11 01 01 00 10 00 10 11 11 10 11 00. Количество битов, которое код может исправить, зависит от минимального расстояния Хамминга p_{min} между путями, которые представляют собой закодированные устройством последовательности. Очевидно, что оно равно целой части от $\frac{p_{min}-1}{2}$. Для того что бы найти минимальное расстояние Хамминга, удобно представить все возможные пути на решёточной диаграмме, указанной на рисунке 3. Из каждой вершины выходит сверху стрелка, соответствующая значению Out = 0, а нижней соответствует Out = 1.

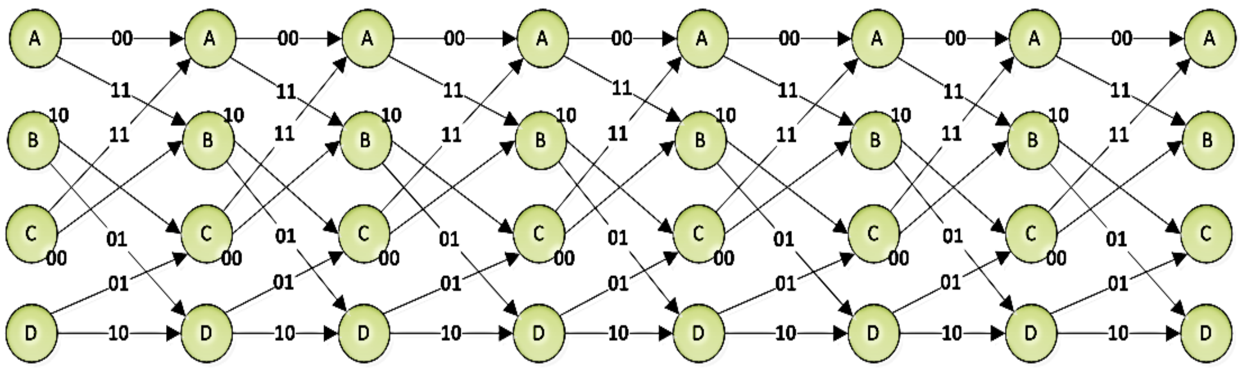

Рис. 3

Минимальное расстояние находится между замкнутыми путями (то есть начинающиеся с A и заканчивающимися в A) с несовпадающими рёбрами поэтому оно равно минимальному весу Хамминга всех таких путей. Эти пути находятся и указаны на рисунке 4 выделенными стрелками.

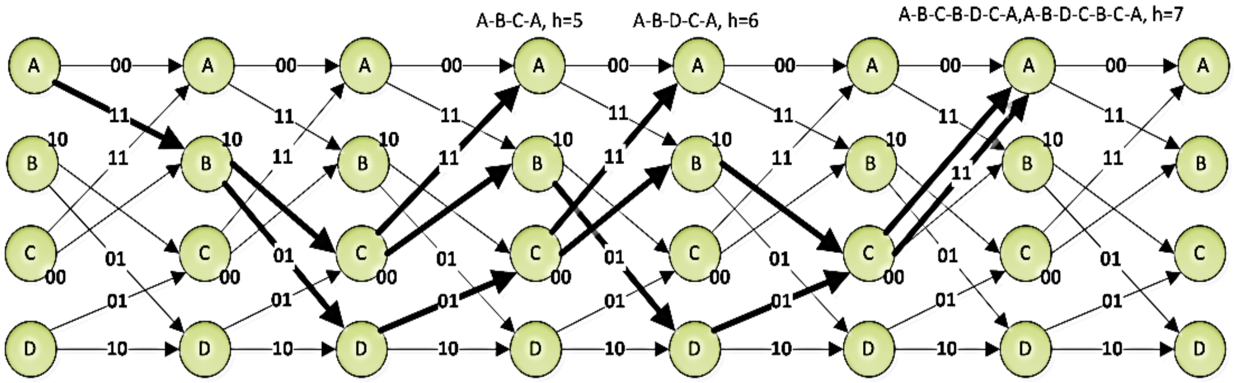

Рис. 4

Кратчайший путь A-B-C-A, соответствует последовательности 11 10 11 с весом Хамминга h = 5 и, следовательно, h равно минимальному расстоянию Хамминнга p_{min}. Такой код уже может исправить 2 ошибки. Минимальное количество циклов необходимое для прохождения последовательности первых 3-х битов Out равно удвоенному количеству триггеров плюс 1, для нашего случая это 5. Это число является ограничением на минимальный размер вводимого кода Out для выявления 2-х ошибок.

Полученный из системы код может отличаться от кода, посылаемого свёрточным кодировщиком. Если получаемый в передаче код отличается от кода системы не более чем на наименьшее расстояние Хамминнга p_{min}, то он и заменяется на системный код. Покажем, как в случае вышеприведённого кодировщика со сдвиговым регистром из двух триггеров удаётся исправить 2 ошибки на код. Пусть поток битов Out = 01011000… Тогда после кодировки передаётся последовательность X = 00 11 10 00 01 01 11 00… Допустим, что полученный сигнал Y = 00 10 10 10 01 01 11 00 … содержит 2 ошибки в заданной последовательности. Проиллюстрируем алгоритм исправления ошибок на рисунке 5.

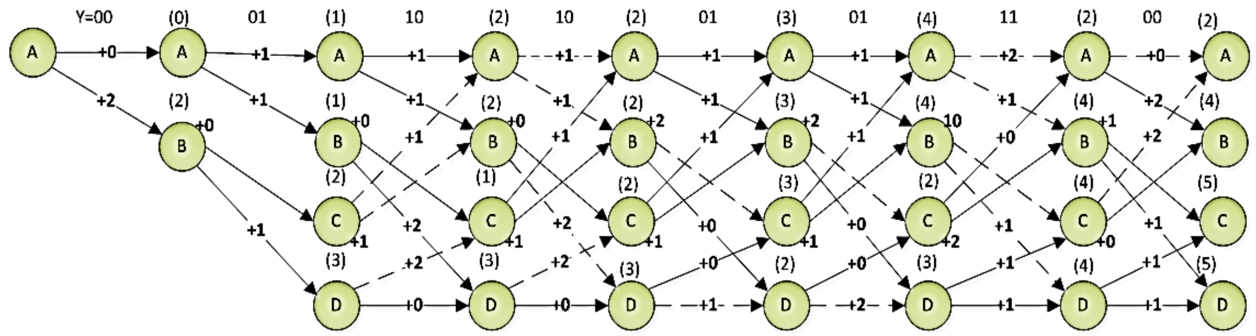

Рис. 5

В скобках показаны расстояния Хамминга для путей, ведущих в вершины, на каждом из рёбер указано расстояния Хамминга от кода X ребра (данные кодов каждых из рёбер даны на рисунке 4) до кода пары соответствующих битов полученного сигнала Y. Выбираются пути которые дают минимальное значение расстояния Хамминга для вершины. Поэтому пунктирными стрелками показаны рёбра не дающие минимальное значение. Выберем, например, 4 и 5 колонки графа. Пунктирная стрелка из D в C соответствует битам 01 кода X. Расстояние от него до 10 равно 2 поэтому такой путь A-B-D-C даст расстояние 5 до C, что больше расстояния A-A-B-C равного 2. В итоге минимальному значению расстояния для вводимого кода X соответствует путь до верщины A имеющий вид A-00-A-11-B-10-C-00-B-01-D-01-C-11-A-00-A который даёт правильный код 00 11 10 00 01 01 11 00. Как и на рисунке 4 верхние рёбра, исходящие из вершин, соответствуют Out = 0, а нижние Out = 1, поэтому восстанавливается кодируемый код Out = 01011000.

В таком алгоритме дешифрования с восстановлением кода для восстановления пути требуется задержка пропорциональная количеству циклов сигнала часов, проходящих через регистры, в работе [2] показано что такая задержка пропорциональна 5(N + 1) то есть в нашем случае равна 15 циклам восстановления данных. Это время необходимое для восстановления полученного кода. Если блок кода прерван на некотором состоянии с минимальным значением расстояния Хамминга, то для возабновления процесса декодирования необходимо что бы он начал работу с состояния А, для этого надо добавить в код последовательность из N нулей, в данном случае 2.

Список литературы

1. Viterbi A.J. Principals of digital communication and coding. McGrow-Hill Book Company. Принципы цифровой связи и кодирования / Перевод с англ. – М.: Радио и связь, 1982.

2. Viterbi A.J. Error bounds for convolutional codes and an asymptotically optimum decoding algorithm // IEEE Transactions on Information Theory. – 1967. – Vol. 13. – P. 260–269.