(cc) BY

Автор:

Мамедалина Любовь Александровна

ученица 9 «Б» класса

Руководитель:

Шонин Максим Юрьевич

учитель математики

МОУ «Петропавловская СОШ»

п. Петропавловский, Челябинская область

МЕТОД ГАУССА В РЕШЕНИИ СЛАУ В ШКОЛЕ

Аннотация*: в данной статье рассматривается проблема использования метода Гаусса для решения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). В работе отмечается, что метод Гаусса зарекомендовал себя как универсальный мощный аппарат, позволяющий решать любую СЛАУ, что является его преимуществом по сравнению с методом сложения и подстановки.*

Ключевые слова*: СЛАУ, метод Гаусса, матрица, ступенчатый вид.*

Выдающегося немецкого математика Карла Фридриха Гаусса (1777–1855) современники называли «королём математики». Ещё в раннем детстве он проявлял незаурядные математические способности. В возрасте трех лет Гаусс уже исправлял счета отца. Рассказывают, что в начальной школе, где учился Гаусс (6 лет), учитель, чтобы занять класс на продолжительное время самостоятельной работой, дал задание ученикам – вычислить сумму всех натуральных чисел от 1 до 100. Маленький Гаусс ответил на вопрос почти мгновенно, чем невероятно удивил всех и, прежде всего, учителя.

Как утверждается в книге известного американского математика Валяха, 75% всех расчетных математических задач приходится на решение систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Это не удивительно, так как математические модели тех или иных процессов либо сразу строятся как линейные ал-

гебраические, либо сводятся к таковым посредством дискретизации или линеаризации. Метод Гаусса прекрасно подходит для решения СЛАУ. Он обладает рядом преимуществ по сравнению с другими методами:

во-первых, нет необходимости предварительно исследовать систему уравнений на совместность;

во-вторых, методом Гаусса можно решать не только СЛАУ, в которых число уравнений совпадает с количеством неизвестных переменных и основная матрица системы невырожденная, но и системы уравнений, в которых число уравнений не совпадает с количеством неизвестных переменных или определитель основной матрицы равен нулю;

в-третьих, метод Гаусса приводит к результату при сравнительно небольшом количестве вычислительных операций.

Метод Гаусса – наиболее мощный и универсальный инструмент для нахождения решения любой СЛАУ.

Метод последовательного исключения неизвестных Гаусса является одним из наиболее универсальных и эффективных методов решения линейных систем. Этот метод известен в различных вариантах уже более 2000 лет.

Метод Гаусса – один из основных результатов линейной алгебры и аналитической геометрии, к нему сводятся множество других теорем и методов линейной алгебры (теория и вычисление определителей, решение систем линейных уравнений, вычисление ранга матрицы и обратной матрицы, теория базисов конечномерных векторных пространств и т. д.).

Таким образом, задача поиска решений СЛАУ методом Гаусса имеет не только самостоятельное значение, но часто является составной частью алгоритма решения многих нелинейных задач, что является актуальностью изучения алгоритма решения СЛАУ методом Гаусса.

Система m линейных алгебраических уравнений с n неизвестными имеет вид (1).

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{11}x_2 + \cdots + +a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + +a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + +a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (1)$$

где m – количество уравнений, n – количество переменных, $x_1, x_2, \dots, x_n$ – неизвестные которые надо определить, $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{mn,}\ b_1, b_2, \dots, b_m$ – известные числа [3].

Решением этой системы называется совокупность n чисел, которые будучи подставленные в уравнения, обращают эти уравнения в тождества.

Система уравнений называется *совместной*, если она имеет хотя бы одно решение. Если она не имеет ни одного решения, то она называется *несовместной* [2].

Совместная система определяется определенной, если она имеет только одно решение, и неопределенной, если она имеет больше одного решения.

Матрицы (2) называются соответственно матрицей и расширенной матрицы системы.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} \quad (2)$$

Важным критерием для нашего исследования была теорема Кронекера – Капелли.

Теорема Кронекера – Капелли.

Для совместности системы (1) необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы этой системы был равен рангу ее расширенной матрицы. Итак, система (1) совместна, если $rang(A) = rang(B)$.

Рассмотрим некоторые следствия из теоремы:

– если ранг совместной системы равен числу неизвестных, то система имеет единственное решение;

– если ранг совместной системы меньше числа неизвестных, то система имеет бесконечное множество решений.

Данные следствия необходимы непосредственно при реализации метода Гаусса.

Метод Гаусса – классический метод решения системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Это метод последовательного исключения переменных, с помощью элементарных преобразований система уравнений приводится к равносильной системе треугольного вида, из которой последовательно, начиная с последних (по номеру), находятся все переменные системы [4].

Алгоритм метода Гаусса [1]:

1. На первом этапе применяю прямой ход, т.е. путём элементарных преобразований над строками систему привожу к ступенчатой или треугольной форме, либо устанавливаю, что система несовместна. А именно, среди элементов первого столбца матрицы выбираю ненулевой, перемещаю его на крайнее верхнее положение перестановкой строк и вычитаю получившуюся после перестановки первую строку из остальных строк, домножив её на величину, равную отношению первого элемента каждой из этих строк к первому элементу первой строки, обнуляю тем самым столбец под ним. После того, как указанные преобразования были совершены, первую строку, и первый столбец мысленно вычёркиваю и продолжаю пока не останется матрица нулевого размера. Если на какой-то из итераций среди элементов первого столбца не нашёлся ненулевой, то перехожу к следующему столбцу и проделываю аналогичную операцию.

2. На втором этапе осуществляю так называемый обратный ход. Суть которого заключается в том, чтобы выразить все получившиеся базисные переменные через небазисные и построить фундаментальную систему решений. Если все переменные являются базисными, то выражаю в численном виде единственное решение системы линейных уравнений. Эта процедура начинается с последнего уравнения, из которого выражаю соответствующую базисную переменную (а она там всего одна) и подставляю в предыдущие уравнения, и так далее, поднимаясь по «ступенькам» вверх. Каждой строчке соответствует ровно одна базисная переменная, поэтому на каждом шаге, кроме последнего (самого верхнего), ситуацию в точности повторяю.

Достоинства метода:

– менее трудоёмкий по сравнению с другими методами (с точки зрения методов, изученными в школьном курсе);

– позволяет однозначно установить, совместна система или нет, и если совместна, найти её решение;

– позволяет найти ранг матрицы системы.

Задача. Решить систему методом Гаусса

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = -4, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = -6, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = -4 \end{cases}$$

Решение:

Прямой ход:

Расширенная матрица системы имеет вид:

$$B = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & -1 & -4 \\ 2 & 3 & -1 & -1 & -6 \\ 1 & 2 & 3 & -1 & -4 \end{array}\right) \sim^1 \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & -7 & -11 & -7 \\ 0 & 1 & -5 & -7 & -8 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & -5 \end{array}\right) \sim^2$$

$$\sim^2 \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & -7 & -11 & -7 \\ 0 & 4 & -20 & -28 & -32 \\ 0 & 4 & 4 & -16 & -20 \end{array}\right) \sim^3 \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & -7 & -11 & -7 \\ 0 & 0 & -27 & -39 & -39 \\ 0 & 0 & -3 & -27 & -27 \end{array}\right) \sim^4$$

$$\sim^4 \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & -7 & -11 & -7 \\ 0 & 0 & -27 & -39 & -39 \\ 0 & 0 & 27 & 243 & 243 \end{array}\right) \sim^5 \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & -7 & -11 & -7 \\ 0 & 0 & -27 & -39 & -39 \\ 0 & 0 & 0 & 243 & 243 \end{array}\right)$$

$\sim^1$ – обнуляем элементы первого столбца, используя первую строку.

$\sim^2$ – умножаем каждый элемент третьей и четвертой строки на 4.

$\sim^3$ – обнуляем элементы a_{32} и a_{42}, используя вторую строку.

$\sim^4$ – умножаем каждый элемент четвертой строки на (-9).

$\sim^5$ – обнуляем элемент a_{43}, используя третью строку.

Авторы привели расширенную матрицу системы к треугольной форме.

$rang(B) = 4 = rang(A)$, где A-матрица системы. Следовательно, согласно теореме Кронекера – Капелли СЛАУ совместна. Так как система содержит в себе

четыре неизвестных, т.е. $k = 4$, то согласно следствию из теоремы Кронекера – Капелли система имеет единственное решение.

Чтобы найти решения данной СЛАУ, можно перейти от матрицы (3) к системе (4):

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & -7 & -11 & -7 \\ 0 & 0 & -27 & -39 & -39 \\ 0 & 0 & 0 & 243 & 243 \end{array}\right) \tag{3}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1, \\ 0 \cdot x_1 - 4x_2 - 7x_3 - 11x_4 = -7, \\ 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 - 27x_3 - 39x_4 = -39, \\ 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 - 0 \cdot x_3 + 243x_4 = 243. \end{cases} \tag{4}$$

Обратный ход:

Выражая переменные, начиная с последнего уравнения и подставляя в предыдущие, получим:

$$\begin{cases} x_1 = -1, \\ x_2 = -1, \\ x_3 = 0, \\ x_4 = 1. \end{cases}$$

Ответ: (-1; -1; 0; 1).

Метод сложения:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = -4, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = -6, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = -4. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1, \\ -4x_2 - 7x_3 - 11x_4 = -11, \\ -27x_3 - 39x_4 = -39, \\ x_4 = 1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = -1, \\ x_2 = -1, \\ x_3 = 0, \\ x_4 = 1. \end{cases}$$

Ответ: (-1; -1; 0; 1).

Итак, метод Гаусса применим к любой системе линейных уравнений, он идеально подходит для решения систем, содержащих больше трех линейных уравнений. Мы сравнили на практике решение систем методом Гаусса, методом сложения и пришла к выводу, что если в системе уравнений более трех переменных, то для их решения более удобен метод Гаусса.

Метод Гаусса решения СЛАУ с числовыми коэффициентами в силу простоты и однотипности выполняемых операций пригоден для счета на электронно-вычислительных машинах.

Список литературы

1. Гусак А.А. Высшая математика: Учебник для студентов вузов / А.А. Гусак. – М.: ТетраСистемс, 2001. – 544 с.

2. Данко П. Высшая математика в упражнениях и задачах / П. Данко, А. Попов, Т. Кожевникова. – 1986. – Т. 1. – 296 с.

3. Ильин В.А. Линейная алгебра: Учебник для вузов / В.А. Ильин, Э.Г. Позняк. – 6-е изд., стер. – М.: Физматлит, 2004. – 280 с.

4. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике / Д.Т. Письменный. – 9-е изд. – Айрис-пресс. – 2009. – 608 с.