Автор:

Татьяненко Антон Алексеевич

ученик 10 «Б» класса

МАОУ «Гимназия им. Н.Д. Лицмана»

г. Тобольск, Тюменская область

Руководитель:

Татьяненко Светлана Александровна

канд. пед. наук, доцент, заведующая кафедрой

Тобольский индустриальный институт (филиал)

ФГБОУ ВО «Тюменский индустриальный университет»

г. Тобольск, Тюменская область

ПЛОЩАДИ МНОГОУГОЛЬНИКОВ НА РЕШЕТКАХ

***Аннотация**: в данной статье представлены основные методы вычисления площадей многоугольников на решетках. Подробно рассмотрена и проиллюстрирована примерами формула Пика, выходящая за рамки школьной программы.*

***Ключевые слова**: многоугольник, площадь многоугольник, формула Пика.*

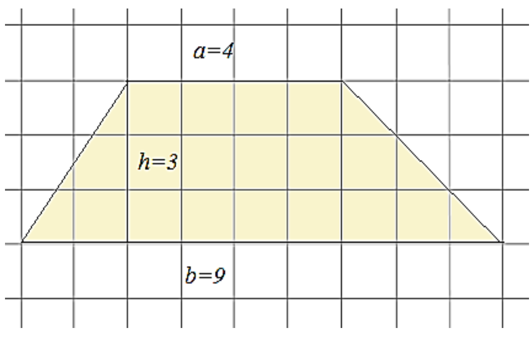
При подготовке к единому государственному экзамену все школьники встречаются с заданиями, связанными с вычислениями площадей фигур, изображенных на клетчатой бумаге. Существует много способов для вычисления площадей, однако мало кому известна универсальная формула, позволяющая вычислить площадь многоугольника, если его вершины расположены в «узлах» клетки.

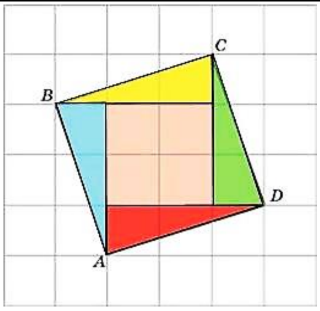
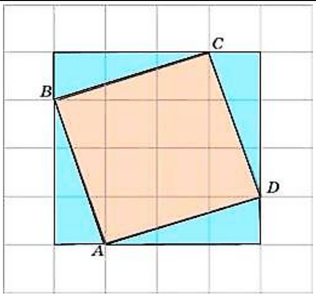
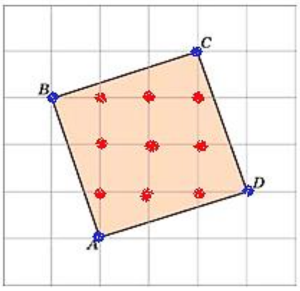
Постановка задачи. Рассмотрим прямоугольную систему координат. Пусть в этой системе задан многоугольник, который имеет целочисленные координаты. Требуется определить его площадь.

Основные методы вычисления площадей. Анализ математической литературы, позволил сделать вывод о том, что выбор метода вычисления площади фигуры на клетчатой бумаге зависит от формы фигуры. Если фигура представляет собой *треугольник, прямоугольник, параллелограмм или трапецию*, то удобно воспользоваться всем известными формулами для вычисления площадей. Если фигура представляет собой *выпуклый* многоугольник, то возможно использовать как метод разбиения, так и дополнения (в большинстве случаях удобнее – метод дополнения). Если фигура представляет собой *невыпуклый* или *звездчатый* многоугольник, то удобнее применить специальную формулу, которая носит название по имени ученого ее открывшего – формулу Пика. Эта формула оставалась незамеченной в течение некоторого времени после того, как австрийский математик Георг Пик её опубликовал (в 1899 г.), однако в 1949 г. польский математик Гуго Штейнгауз включил теорему в свой знаменитый «Математический калейдоскоп». С этого времени теорема Пика стала широко известна. В Германии формула Пика включена в школьные учебники. Однако, в нашей стране данная формула выходит за рамки школьной программы, и мало кому известна, хотя является универсальной и отличается своей простотой.

Классификация методов вычисления площадей фигур, изображенных на клетчатой бумаге представлены в таблице 1.

Таблица 1

Фигура	*Метод*	*Алгоритм*	*Пример*
Треугольник, параллелограмм, трапеция	*Известные формулы геометрии*	1) подсчитывая клеточки нужно найти высоту, диагонали или стороны, которые требуются для вычисления площади; 2) подставить найденные величины в формулу площади	 Подсчитываем клеточки и находим: $a = 4, b = 9$, $h = 3$. По формуле получаем: $S = \frac{a+b}{2} \cdot h = \frac{4+9}{2} \cdot 3 = 19{,}5$ см^2.

Многоугольник	*Метод разбиения*	1) разбить многоугольник на треугольники, прямоугольники; 2) вычислить площади полученных фигур; 3) найти сумму всех площадей полученных фигур	 Площадь одного треугольника равна $S_{\Delta} = \frac{1}{2}3 \cdot 1 = 1{,}5\ (\text{см}^2)$, площадь квадрата – $S_{\blacksquare} = 2 \cdot 2 = 4(\text{см}^2)$. Складывая площади всех фигур получим: $S = 4 \cdot 1{,}5 + 4 = 10(\text{см}^2)$.
	Метод дополнительного построения	1) достроить фигуру до прямоугольника 2) найти площади полученных дополнительных фигур и площадь самого прямоугольника 3) из площади прямоугольника вычесть площади всех «лишних» фигур.	 Площадь прямоугольника равна $S_{\text{пр.}} = 4 \cdot 4 = 16\ (\text{см}^2)$, площади «лишних» треугольников – $S_{\Delta} = \frac{1}{2}3 \cdot 1 = 1{,}5\ (\text{см}^2)$, тогда площадь искомой фигуры $S = 16 - 4 \cdot 1{,}5 = 10(\text{см}^2)$.
	Формула Пика	*Вершины многоугольника должны располагаться в узлах клетки – главное условие применения формулы Пика!!!*	
		1) посчитать количество целочисленных точек внутри многоугольника, обозначим их «В» 2) посчитать количество целочисленных точек на границе многоугольника, обозначим их «Г» 3) применить формулу Пика: $\boxed{S = B + \frac{\Gamma}{2} - 1}$	 1) Количество внутренних узлов В=9, количество внешних узлов Г=4, тогда по формуле Пика имеем: $S = 9 + \frac{4}{2} - 1 = 10(\text{см}^2)$.

Примеры вычисления площадей по формуле Пика. Вычислять площади многоугольников, расположенных на клетках можно различными способами. Выбор метода как уже отмечалось выше зависит от формы фигуры. Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Найти площадь фигуры, изображенной на рисунке 1 с размером клетки 1см на 1 см.

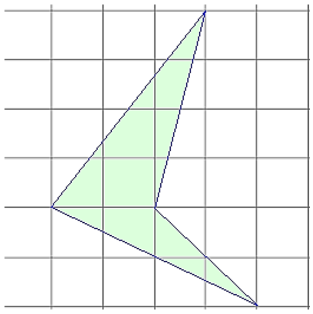
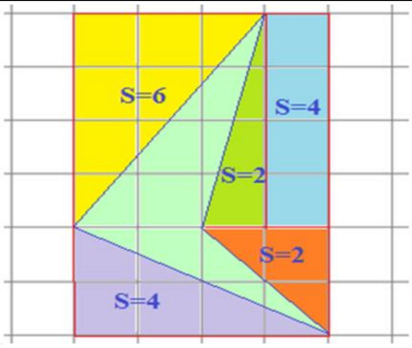
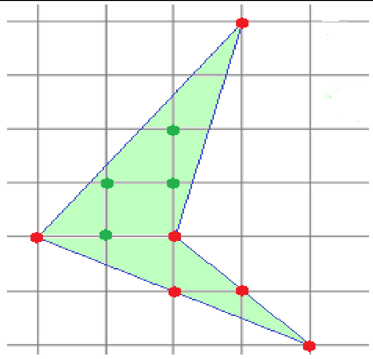


Рис. 1. К примеру 1

Решение. Рассмотрим 2 метода (таблица 2).

Таблица 2

Дополнительное построение	*Формула Пика*
 Достраиваем фигуру до прямоугольника, получаем площадь искомой фигуры равна $S = 24– 6\text{-}4– 4\text{-}2– 2 = 6$ см^2.	 Количество внутренних узлов $B = 4$, количество внешних узлов $\Gamma = 6$, тогда площадь искомой фигуры равна $S = 4 + \frac{6}{2}\text{-}1 = 6$ см^2

Замечание: В данной задаче рациональнее было использовать формулу Пика.

Пример 2. Найти площадь фигуры, изображенной на рисунке 2 с размером клетки 1 см на 1 см.

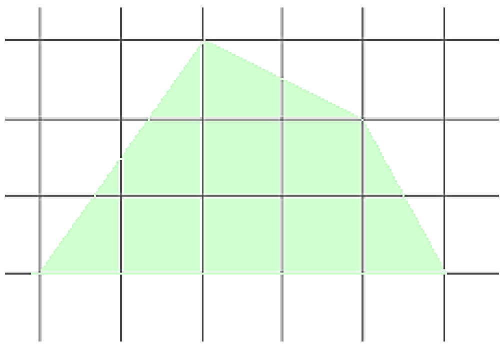
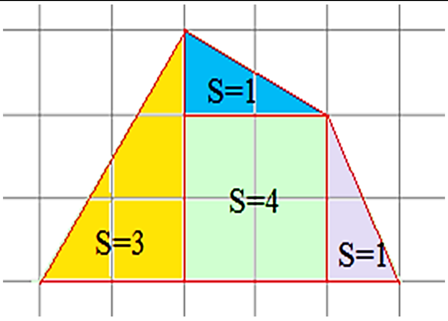
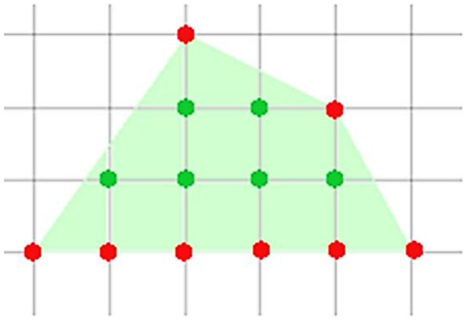


Рис. 2. К примеру 2

Таблица 3

Разбиение	*Формула Пика*
 Разбиваем фигуру на прямоугольные треугольники, получаем площадь искомой фигуры равна $S = 4 + 3 + 1 + 1 = 9$ см^2.	 Количество внутренних узлов В = 6, количество внешних узлов Г = 8, тогда площадь искомой фигуры равна $S = 6 + \frac{8}{2}$-1 = 9 см^2

Замечание: В данной задаче не составит труда вычислить площадь и методом разбиения и по формуле Пика.

Пример 3. Лес – санитар воздуха. Один гектар еловых насаждений может задерживать в год до 32 т пыли, сосновых – до 35 т, вяза – до 43 т, дуба – до 50 т. бука – до 68 т. Посчитайте, сколько тонн пыли задержит ельник за 5 лет. План ельника изображен на рисунке 3 (масштаб 1 см. – 200 м.).

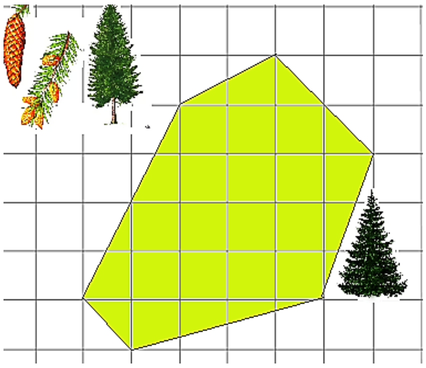


Рис. 3. К примеру 3

Решение. Сначала посчитаем площадь участка ельника. Воспользуемся формулой Пика (рис. 4). Количество внутренних узлов *В = 19*, количество внешних узлов Г = 8, тогда площадь фигуры равна $S = 19 + \frac{8}{2}$-1 = 22 см^2

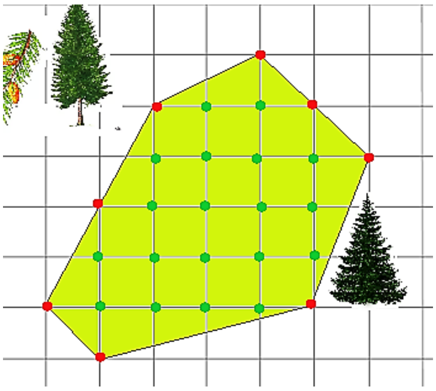


Рис. 4. К примеру 3

Учитывая масштаб: 1 см^2 = 200^{2}м^2 = 40000 м. S = 22 · 40000 = 880000 м^2. Т.к. 1 га = 10000 м^2, следовательно, S = 88 га. В год 88 гектаров еловых насаждений могут удерживать до 88 · 32 = 2816 т. пыли, следовательно за 5 лет – до 14080 т.

Таким образом, формула Пика является универсальной формулой для вычисления площадей (если вершины многоугольника находятся в узлах решетки), т.е ее можно использовать для любой фигуры. Однако, если многоугольник занимает достаточно большую площадь (или клетки мелкие), то велика вероятность допустить ошибку в подсчетах узлов решетки.

Список литературы

1. Вавилов В.В. В12 Многоугольники на решетках / В.В. Вавилов, А.В. Устинов. – М.: МЦНМО, 2006. – 72 с.

2. Васильев И.Н. Вокруг формулы Пика // Научно-популярный физико-математический журнал «Квант». – 1974. – №12 [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://kvant.mccme.ru/1974/12/vokrug_formuly_pika.htm

3. Жарковская Н. Геометрия клетчатой бумаги. Формула Пика / Н. Жарковская, Е. Рисс // Первое сентября. Математика. – 2009. – №23. – С. 24, 25.

4. Пик Г. Википедия [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://ru.wikipedia.org/wiki/Пик,_Георг