

Силина Анастасия Викторовна

магистрант

Субхангулова Фаниса Исафиловна

магистрант

Бадына Елена Владимировна

магистрант

Калимуллина Альбина Амировна

магистрант

ФГБОУ ВПО «Магнитогорский государственный

технический университет им. Г.И. Носова»

г. Магнитогорск, Челябинская область

ПОСТРОЕНИЕ КОНЕЧНО-РАЗНОСТНЫХ СХЕМ ДЛЯ РАСЧЕТА ПОЛЯ ТЕМПЕРАТУРЫ В ЭЛЕМЕНТАХ БАРЬЕРНОГО ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ОЗОНАТОРА

Аннотация: данная работа посвящена построению конечно-разностных схем для численного решения дифференциальных уравнений, описывающих распределение поля температуры в барьерном электрическом озонаторе с турбулентным режимом течения газа, методом простой итерации.

Ключевые слова: барьерный электрический озонатор, метод простой итерации, конечно-разностные схемы, дифференциальные уравнения, частные производные, моделирование тепловых процессов.

Проблема моделирования тепловых процессов в барьерном электрическом озонаторе (БЭО) является в настоящее время довольно актуальной. Несмотря на явные преимущества озонирования, данный способ отчистки воды и воздуха является одним из самых дорогостоящих. Это связано, в первую очередь, с несовершенством конструкции БЭО.

Средства математического моделирования позволяют сымитировать тепловые процессы, происходящие в элементах БЭО, и, как следствие, выяснить зависимость температуры от различных физических и химических параметров, таких

как, размеры озонатора, тип системы охлаждения, амплитуда подаваемой мощности, материал барьера, электрода и другие.

В [3, с. 72; 88] была построена математическая модель для расчета поля температуры в барьерном электрическом озонаторе с турбулентным режимом течения газа. В работе [5, с. 11–12] данная модель была усовершенствована с пограничных слоев в газовом промежутке. Для каждой зоны выведено уравнение, описывающие распределение поля температуры в установившемся режиме работы.

Построенная модель не имеет аналитического решения, за исключением уравнения, описывающего распределение поля температуры в турбулентном потоке. Поэтому решать ее необходимо численно, при помощи ЭВМ. Для этого нужно построить конечно-разностные схемы для дифференциальных уравнений.

На рисунке 1 представлена схема расположения элементов озонатора.

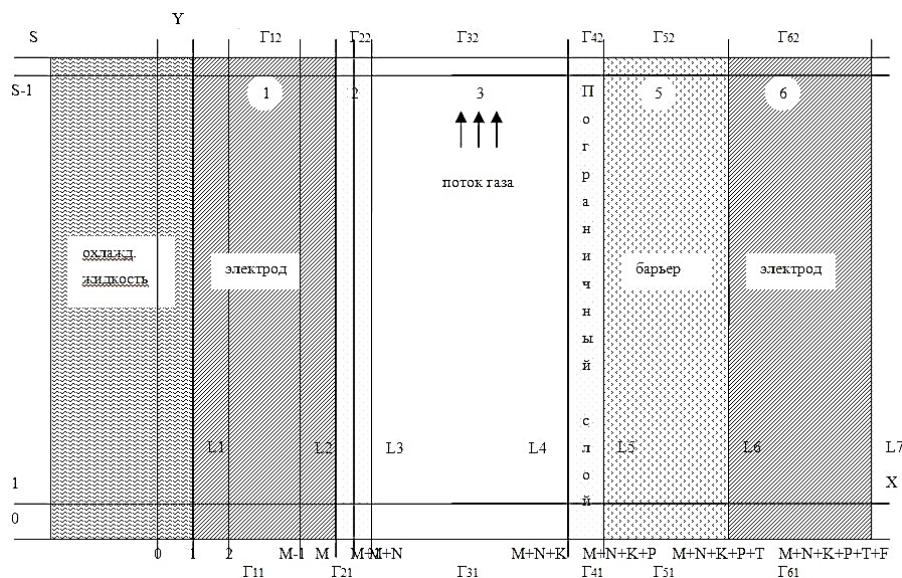


Рис. 1. Схема расположения элементов озонатора с турбулентным режимом течения газа, учитывающая пограничные слои газа

Уравнение поля температур в зоне 3 (разрядный промежуток) для турбулентного режима течения газа представляет собой линейное дифференциальное уравнение второго порядка. Его общее решение имеет вид:

$$T_\Gamma(y) = \frac{q_\Gamma}{\rho c_p V} y + C_1 \frac{\lambda_\Gamma}{\rho c_p V} \exp\left(\frac{\rho c_p V y}{\lambda_\Gamma}\right) + C_2. \quad (1)$$

C_1 и C_2 – числовые параметры, которые определяются постановкой в полученное выражение граничных условий:

$$C_1 = \frac{\rho c_p V}{\lambda_\Gamma} \left(\exp \left(\frac{\rho c_p V l}{\lambda_\Gamma} \right) - 1 \right)^{-1} \left(T_L - T_A - \frac{q_\Gamma}{\rho c_p V} l \right), C_2 = T_A - C_1 \frac{\lambda_\Gamma}{\rho c_p V}. \quad (2)$$

При нормальных условиях воздух имеет плотность $\rho \approx 1,3 \text{ кг/м}^3$, теплоемкость $c_p \approx 1000 \text{ Дж/}^\circ\text{C}$ и коэффициент теплопроводности $\lambda \approx 0.03 \text{ Вт/(м}\cdot{}^\circ\text{C)}$. Следовательно,

$$\exp \left(\frac{\rho c_p V l}{\lambda_\Gamma} \right) > \exp(4000),$$

поэтому, с высокой степенью точности можно считать, что

$$\left(\exp \left(\frac{\rho c_p V l}{\lambda_\Gamma} \right) - 1 \right)^{-1} = 0.$$

Таким образом, получаем: $C_1 = 0$, $C_2 = T_A$.

С учетом этого функция распределения температуры в каждой точке зоны 3 (разрядный промежуток) принимает вид:

$$T_3(y) = \frac{q_\Gamma}{\rho c_p V} (y - l) + T_L \quad (3)$$

Для нахождения поля температуры в остальных элементах озонатора будем использовать конечно-разностный метод решения дифференциальных уравнений в частных производных [6, с. 89].

В данном случае частные производные можно дискретизировать следующим образом:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{i,j} &= \frac{T_{i+1,j} - T_{i,j}}{h_x}; \quad \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right)_{i,j} = \frac{T_{i+1,j} - 2T_{i,j} + T_{i-1,j}}{h_x^2}; \\ \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{i,j} &= \frac{T_{i,j+1} - T_{i,j}}{h_y}; \quad \left(\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right)_{i,j} = \frac{T_{i,j+1} - 2T_{i,j} + T_{i,j-1}}{h_y^2}; \end{aligned} \quad (4)$$

h_x , h_y – шаг сетки по оси абсцисс и ординат, соответственно.

Подставив полученные выражения в исходные уравнения и выполнив преобразования, получим уравнение для нахождения поля температуры в металлических электродах и барьере:

$$T_{i,j} = \frac{h_y^2(T_{i,j-1} + T_{i,j+1}) + h_x^2(T_{i-1,j} + T_{i+1,j})}{2(h_y^2 + h_x^2)} \quad (5)$$

для $2 \leq i \leq S-1$, $2 \leq j \leq M-1$, $M+N+K+P+T+2 \leq j \leq M+N+K+P+T+F-1$ и $M+N+K+P+2 \leq j \leq M+N+K+P+T-1$.

Для нахождения поля температуры в пограничном слое разрядного промежутка, с учетом его узости, необходимо разбиение на более мелкие шаги h_{x1} по переменной x . Получим:

$$T_{i,j} = \frac{h_y^2(T_{i,j-1} + T_{i,j+1}) + h_{x1}^2(T_{i-1,j} + T_{i+1,j})}{2(h_y^2 + h_{x1}^2)} + \frac{h_{x1}^2 h_y^2}{2(h_y^2 + h_{x1}^2)} \left(\frac{q_\Gamma}{\lambda_\Gamma} - \frac{c_p \rho V_i (T_{i+1,j} - T_{i-1,j})}{2\lambda_\Gamma h_y} \right), \quad (6)$$

V_i - усредненная продольная составляющая скорости, которую можно найти по формуле:

$$V_i = \begin{cases} \frac{Q_v \left(1 - \exp \left(-\frac{x}{\delta} \right) \right)}{A \left(\Delta + 2\delta \left(\exp \left(\frac{\Delta}{2\delta} \right) - 1 \right) \right)}, & 0 \leq x \leq \frac{\Delta}{2}, \\ \frac{Q_v \left(1 - \exp \left(\frac{x-\Delta}{\delta} \right) \right)}{A \left(\Delta + 2\delta \left(\exp \left(-\frac{\Delta}{2\delta} \right) - 1 \right) \right)}, & \frac{\Delta}{2} \leq x \leq \Delta, \end{cases} \quad (7)$$

где δ – толщина пограничного слоя, Q_v – расход газа через озонатор [3, с. 91].

Границные условия для расчета поля температуры на границах перехода из одного элемента озонатора в другой, на их торцевых границах и на входе и выходе разрядного промежутка после преобразования примут вид:

$$\begin{aligned} \Gamma_{21}, \Gamma_{22}, \Gamma_{24}, \Gamma_{25}, \Gamma_{26}: \quad & T_{s,j} = T_{s-1,j}, \quad 0 \leq j \leq M+N, \\ & M+N+K+P \leq j \leq M+N+K+P+T+F; \\ \Gamma_{11}, \Gamma_{15}, \Gamma_{16}: \quad & T_{2,j} = T_{1,j}, \quad 0 \leq j \leq M+N, \quad M+N+K+P \leq j \leq M+N+K+P+T+F; \\ \Gamma_{12}, \Gamma_{13}, \Gamma_{14}: \quad & T_{1,j} = T_A, \quad M \leq j \leq M+N+K+P; \\ \Gamma_{23}: \quad & T_{s,j} = T_L, \quad M+N \leq j \leq M+N+K; \\ L1: \quad & \lambda_M \frac{T_{i+1,M} - T_{i,M}}{h_x} = \alpha_X (T_{i,M} - T_K); \\ L2: \quad & \alpha_{\Gamma M} (T_{i,M+N} - T_{i,M+N-1}) = \lambda_M \frac{T_{i,M+N+1} - T_{i,M+N}}{h_x} + q_{\Gamma M}^*; \\ L3: \quad & T_{i,M+N} = T_{i,M+N+1}; \\ L4: \quad & T_{i,M+N+K} = T_{i,M+N+K-1}; \end{aligned} \quad (8)$$

$$L5: \quad \alpha_{\Gamma B} (T_{i,M+N+K+P} - T_{i,M+N+K+P-1}) \\ = \lambda_M \frac{T_{i,M+N+K+P+1} - T_{i,M+N+K+P}}{h_x} + q_{\Gamma B}^*;$$

$$L6: \quad T_{i,M+N+K+P+T} = \frac{\lambda_M T_{i,M+N+K+P+T+1} + \lambda_B T_{i,M+N+K+P+T-1}}{\lambda_B + \lambda_M}$$

$$L7: \quad T_{i,M+N+K+P+T+F} = T_{i,M+N+K+P+T+F-1}; \quad (2 \leq i \leq S-1)$$

Таким образом, (3), (5), (6), (8) образуют разностные схемы, которые позволяют рассчитать температуру в каждом узле сетки поля температуры. Для расчета удобно использовать метод простой итерации

Этот метод основан на принципе сжимающих отображений [6, с. 79]. Суть метода – нахождение алгоритма поиска по известному приближению искомой величины следующего, более точного приближения. Применяется в случае, когда последовательность приближений по указанному алгоритму сходится.

Уравнение (5) – это разностная схема для уравнения Лапласа в двумерном пространстве. В [2, с. 669] показано, что метод сеток для уравнения Лапласа сходится со скоростью h^2 .

Уравнение (6) – разностная схема для уравнения Пуассона, которое также является сходящимся [1, с. 543] со скоростью $O(h^2) \geq \|u^i - u\|$ – оценка, зависящая от шага сетки (u – точное решение, u^i – решение, полученное на i -той итерации). В данном случае в качестве начального приближения удобно считать, что в начальный момент времени температура в каждом узле сетки охлаждаемого электрода изменяется линейно по оси Ox от T_J до T_A , а от u температура не зависит. Во всех остальных узлах начальная температура равна исходной температуре атмосферы T_A .

Список литературы

1. Бахвалов Н.С. Численные методы: Учебное пособие / Н.С. Бахвалов, Н.П. Жидков, Г.М. Кобельков; МГУ им. М.В. Ломоносова. – 3-е изд., доп. и перераб. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2004. – 636 с.
2. Волков Е.А. Об условиях сходимости метода сеток для уравнения Лапласа со скоростью h^2 / Е.А. Волков // Математические заметки. – 1969. – Т. 6. – №6. – С. 669–679.

3. Кузнецов В.А. Математическое моделирование процессов в барьерном электрическом озонаторе: Теория и практика / В.А. Кузнецов. – М. – Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004. – 193 с.
4. Матвеев А.Н. Электричество и магнетизм / А.Н. Матвеев. – М.: Высшая школа, 1983. – 463 с.
5. Силина А.В. Совершенствование математической модели тепловых процессов в барьерном электрическом озонаторе с турбулентным режимом течения газа / А.В. Силина, И.А. Лызлова // Наука в глобальном мире: сборник материалов Междунар. очно-заочн. студ. науч.-исслед. конф. / Науч. Рук. В.С. Севастьянова, ред.-сост. А.В. Бутова, А.И. Дубских. – Магнитогорск: Изд-во Магнитогорск. гос. техн. ун-та им. Г.И. Носова, 2015. – С. 10–13.
6. Турчак Л.И. Основы численных методов / Л.И. Турчак. – М.: Наука, 1987. – 318 с.