Авторы:

Подгорная Юлия Сергеевна

ученица 9 «А» класса

Суворов Андрей Александрович

ученик 8 «В» класса

ГУО «Гимназия №14 г. Гомеля»

г. Гомель, Республика Беларусь

КОНСТРУИРОВАНИЕ N-АРНЫХ ГРУПП НА МНОЖЕСТВЕ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ С МОДУЛЕМ, РАВНЫМ ЕДИНИЦЕ

***Аннотация**: цель исследования – развитие универсальной теории n-арных групп и применение этой теории при любом n ≥ 2 в теории комплексных чисел. В работе на множестве комплексных чисел с модулем, равным единице, построена n-арная группа и найдено доказательство n-арного аналога теоремы о группе комплексных чисел с модулем, равным единице. Работа имеет теоретический характер. Для доказательств в работе применялись методы теории чисел, теории n-арных групп и n-арных алгебраических систем.*

***Ключевые слова**: n-арная операция, n-арная группа, производная n-арной группы, комплексное число.*

Объектом исследования являются n-арные группы, предметом исследования – комплексные числа, n-арные группы и n-арная группа, являющаяся производной от бинарной группы.

Начало развития теории n-арных групп (где $n \geq 2$) восходит к работе Дёрнте [1], инициированной Эмми Нетер. Не смотря на то, что теория n-арных групп является сравнительно молодой ветвью алгебры, в этой области математики уже получены глубокие результаты, нашедшие отражение в научной литературе (см., например, обзоры В.А. Артамонова и Глазека, работы А.К. Сушкевича, А.Г. Куроша, Поста, С.А. Чунихина, В.Д. Белоусова, Р. Брака, В.И. Тютина, Ю.И. Кулаженко А.М. Гальмака и Г.Н. Воробьева, В. Дудека и др.). Монография С.А. Русакова [3] «Алгебраические n-арные системы: Силовская теория n-арных групп» – первое в мировой литературе систематическое изложение теории n-арных групп.

Актуальность изучения n-арных групп в настоящее время обосновывается также тем, что n-арные системы нашли выход в различные области математики, например, аффинную геометрию, теорию переходных систем, теорию полиадических автоматов. Таким образом, работа, посвященная построению n-арных групп на множестве комплексных чисел с модулем, равным единице, актуальна. В работе доказано, что множество C^* всех комплексных чисел с модулем, равным единице, является n-арной группой $<C^*, (\ )^{\sigma}>$, где $n \geq 2$.

В работе используются обозначения и определения, зафиксированные в монографии [3]. Напомним некоторые из них.

Пусть X – некоторое непустое множество. Последовательность $<x,y,\ldots,z>$ элементов множества X в дальнейшем будет записываться и так: $xy\ldots z$. Число всех элементов последовательности называется ее длинной. Пустая последовательность – это последовательность, не содержащая ни одного элемента; число 0 называется ее длиной. Пусть m и n – такие целые числа, что $m > 0$ и $k \geq 0$. Тогда символ x_m^k при $k > 0$ и $m \geq k$ означает последовательность $x_m\, x_{m+1}\ldots x_k$ (x_m, $x_{m+1},\ldots,x_k \in X$), причем при $m = k$ считаем $x_m^m = x_m$, а при $m > k$ – пустую последовательность; символ же x^k при $k > 0$ означает последовательность $xx\ldots x$ длинны k ($x \in X$), а при $k = 0$ – пустую последовательность.

Пусть r – целое положительное число. Через X^r обозначается множество всех последовательностей x_1^r элементов из X, т.е.

$$X^r = \{\, x_1^r \mid x_1, x_2, \ldots, x_r \in X,\ i = 1, 2,\ldots, r\}.$$

Очевидно, при $r = 1$ получаем $X^1 = X$. Множество X^r называется, как известно, декартовой r-й степенью множества X.

1. Определение. Пусть множество X не пусто и n – целое положительное число. n-Арной операцией на множестве X называется отображение σ: $X^n \to X$;

число n рангом n-арной операции. Нульарной операцией на множестве X называется выделение (фиксация) какого-нибудь элемента множества X; число 0 называется рангом нульарной операции [3, с. 7].

Если последовательности $x_1^n \in X^n$ n-арная операция σ ставит в соответствие элемент $y \in X$, то пишут $(x_1^n)^{\sigma} = y$. n-Арные операции ранга 1, 2 и 3 называются также унарной, бинарной и тернарной операциями соответственно.

2. Определение. Пусть X – непустое множество и Σ – множество операций на X. Тогда пара $<X, \Sigma>$ называется универсальной алгеброй или, короче, алгеброй. При этом X называют основным множеством алгебры $<X, \Sigma>$, а элементы из X – элементами алгебры $<X, \Sigma>$; операции множества Σ называются главными операциями алгебры $<X, \Sigma>$. Если $<X, \Sigma>$ – алгебра, то говорят также, что множество X есть алгебра относительно операций Σ, и алгебру $<X, \Sigma>$ обозначают через X [3, с. 8].

3. Определение. Алгебра $G = <X, (\ )>$ типа $<n>$, где $n \geq 2$ называется n-арной группой, если выполняются следующие аксиомы (условия):

1) n-арная операция ( ) на множестве X ассоциативна, т. е. для любой последовательности $x_1^{2n-1} \in X^{2n-1}$ имеет место равенство

$$((x_1^n)\, x_{n+1}^{2n-1}) = (x_1^j\, (x_{j+1}^{j+n})\, x_{j+n+1}^{2n-1}) \ (j = 1, 2, \ldots, n-1);$$

2) для любой последовательности $x_1^{2n-1} \in X^{2n-1}$ каждое из уравнений $(xa_1^{n-1}) = a$; $(a_1^{n-1}\, y) = a$ разрешимо в X [3, с. 8].

Приведем определение производной n-арной группы, впервые введенное Дернте [1, с. 5].

4. Определение. Пусть $G = <X, (\ )>$ является n-арной группой. Если на множестве X существует такая r-арная группа $\Gamma = <X, [\ ]>$, что $n = k\,(r-1)+1$ и $(x_1^n) = [x_1^n]$ для любой последовательности $x_1^n \in X^n$, то G называется производной n-арной группой от r-арной группы Γ.

Приведем основные используемые результаты [2]. Извлечь корень m-ой степени из комплексного числа z – это значит найти такое комплексное число α, что $\alpha^m = z$. Здесь рассматриваем только натуральные степени ($m \in N$).

1. Теорема. Извлечение корня m-ой степени из комплексного числа $z = |z|$ $(\cos\varphi + i \sin\varphi)$ всегда возможно. Все m значений корня m-ой степени из z расположены в вершинах правильного m-угольника, вписанного в окружность с центром в точке нуль и радиуса $\sqrt[m]{|z|}$, причем

$$\sqrt[m]{z} = \sqrt[m]{|z|}\ (\cos((\varphi+2\pi k)/m)+i \sin((\varphi+2\pi k)/m)),\ k = 0, 1,\ldots, m-1.$$

Нам понадобится:

2. Теорема. n-Арная группа $G = \langle X, (\ )\rangle$ является производной от бинарной группы $\Gamma = \langle X, \bullet\rangle$ тогда и только тогда, когда G обладает единицей [3, с. 68].

Известно, что множество всех комплексных чисел с модулем, равным единице, образует бинарную группу относительно умножения [2]. В работе получена теорема, являющаяся обобщением этого результата, а именно

3. Теорема. На множестве C^* всех комплексных чисел с модулем, равным единице, существует n-арная операция $(\ )^\sigma$, относительно которой алгебра $\langle C^*, (\ )^\sigma\rangle$ типа $\langle n\rangle$ является абелевой n-арной группой, где $n \geq 2$.

Доказательство. На множестве C^* для фиксированного натурального числа $n \geq 2$ зададим отображение $(\ )^\sigma$: $C^{*n} \to C^*$ по правилу

$$(a_1^n)^\sigma = \cos(\varphi_1+\varphi_2+\ldots+\varphi_n) + i \sin(\varphi_1+\varphi_2+\ldots+\varphi_n),$$

где $a_1^n \in C^{*n}$ и $a_j = \cos\varphi_j + i \sin\varphi_j$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$.

Очевидно, отображение $(\ )^\sigma$ на множестве C^* задает n-арную операцию. Покажем, что алгебра $\langle C^*, (\ )^\sigma\rangle$ типа $\langle n\rangle$, где $n \geq 2$, является n-арной абелевой группой.

Пусть $a_1^{2n-1} \in C^{*\,2n-1}$. Тогда для $a_k = \cos\varphi_k + i \sin\varphi_k$ $(k = 1,\ldots, 2n-1)$ имеем

$$((a_1^n)^\sigma a_{n+1}^{2n-1})^\sigma = ((\cos(\varphi_1+\varphi_2+\ldots+\varphi_n)+i \sin(\varphi_1+\varphi_2+\ldots+\varphi_n))a_{n+1}^{2n-1}) =$$

$$= \cos((\varphi_1+\varphi_2+\ldots+\varphi_n)+\varphi_{n+1}+\ldots+\varphi_{2n-1})+i \sin((\varphi_1+\varphi_2+\ldots+\varphi_n)+\varphi_{n+1}+\ldots+\varphi_{2n-1}) =$$

$$= \cos(\varphi_1+\ldots+\varphi_j+(\varphi_{j+1}+\ldots+\varphi_{j+n})+ \varphi_{j+n+1}+\ldots+\varphi_{2n-1})+$$

$$+ i \sin(\varphi_1+\ldots+\varphi_j+(\varphi_{j+1}+\ldots+\varphi_{j+n})+\varphi_{j+n+1}+\ldots+\varphi_{2n-1}) =$$

$$= (a_1^j\ (a_{j+1}^{j+n})^\sigma\ a_{j+n+1}^{2n-1})^\sigma\ (j = 1, 2, \ldots, n-1).$$

Пусть теперь $a_1^{n-1}a \in C^{*n}$, где $a_{j\,=}$ cosφ_j + i sinφ_j, a = cosφ+i sinφ (j = 1, 2, …, n-1). Рассмотрим уравнение $(xa_1^{n-1})^{\sigma} = a$. Покажем, что элемент

$$b = \cos(\varphi-\varphi_1-\varphi_2-\ldots-\varphi_{n-1})+i\sin(\varphi-\varphi_1-\varphi_2-\ldots-\varphi_{n-1})$$

из C^* является решением этого уравнения. Действительно,

$$(ba_1^{n-1})^{\sigma} = \cos((\varphi-\varphi_1-\varphi_2-\ldots-\varphi_{n-1})+\varphi_1+\varphi_2+\ldots+\varphi_{n-1})+$$
$$+i\sin((\varphi-\varphi_1-\varphi_2-\ldots-\varphi_{n-1})+\varphi_1+\varphi_2+\ldots+\varphi_{n-1}) = \cos\varphi+i\sin\varphi = a.$$

Ясно, что элемент $b \in C^*$ также является решением уравнения $(a_1^{n-1}y)^{\sigma} = a$.

На основании определения 3 заключаем, что $<C^*, (\ )^{\sigma}>$ является n-арной группой. Абелевость $< C^*, (\ )^{\sigma}>$ очевидна. Теорема доказана.

4. *Теорема*. n-Арная группа $<C^*, (\ )^{\sigma}>$ является производной от бинарной группы $<C^*, \bullet>$ относительно операции • умножения комплексных чисел.

Доказательство. Пусть $|e| = 1$, $\varphi = 0$, тогда $e \in C^*$ является единичным элементом n-арной группы $<C^*, (\ )^{\sigma}>$, поскольку для любого элемента

$$a = \cos\varphi+i\sin\varphi \in C^*$$

имеем

$$(aee\ldots e)^{\sigma} = \cos(\varphi+0+0+\ldots+0)+i\sin(\varphi+0+0+\ldots+0) =$$
$$= \cos(0+0+\ldots+0+\varphi+0+\ldots+0)+i\sin(0+0+\ldots+0+\varphi+0+\ldots+0) =$$
$$= (e\ldots e\,a\,e\ldots e)^{\sigma} = \ldots = \cos(0+0+\ldots+0+\varphi)+i\sin(0+0+\ldots+0+\varphi) =$$
$$= \cos\varphi+i\sin\varphi = a.$$

Принимая во внимание теорему 2 и определение операции умножения комплексных чисел, заключаем, что n-арная группа $<C^*, (\ )^{\sigma}>$ является производной от бинарной группы $<C^*, \bullet>$. Теорема доказана.

Список литературы

1. Untersuchungen über einen verallgemeinerten Gruppenbegriff // W. Dörnte. – Math. Z., 1928. – Bd. 29. – 1928. – S. 1–19.

2. Гусак А.А. В мире чисел // А.А. Гусак, Г.М. Гусак, Е.А. Гусак. – Мн.: Народная асвета, 1987. – 191 с.

3. Русаков С.А. Алгебраические n-арные системы: Силовская теория nарных групп // С.А. Русаков. – Минск: Навука і тэхніка, 1992. – 264 с.