Русакова Екатерина Андреевна
студентка
ФГБОУ ВПО «Рязанский государственный
радиотехнический университет
г. Рязань, Рязанская область

ПРАКТИЧЕСКИЕ ПРИМЕНЕНИЕ ОРТОГОНАЛЬНЫХ ЛАТИНСКИХ КВАДРАТОВ НА ПРИМЕРЕ ЗАДАЧИ О МАРШРУТНЫХ ЛИСТАХ

Аннотация*: статья посвящена изучению латинских и ортогональных латинских квадратов, задачу отыскания которых впервые поставил Л. Эйлер в 1782 г. Рассмотрены некоторые свойства латинских квадратов и их практическое применение на основе собственной задачи.*

Ключевые слова*: латинские квадраты, ортогональные латинские квадраты, Эйлер, свойства, ортогональные латинские квадраты, задача, маршрутные листы.*

Латинский квадрат N-го порядка – это квадрат N x N, заполненный элементами множества М таким образом, что в каждой строке и каждом столбце каждый элемент из М встречался только один раз.

Когда Эйлер ввел понятие ортогональных (греко-латинских) латинских квадратов они были просто новыми математическими объектами. В настоящее время они нашли широкое применение (в комбинаторике полные системы ортогональных латинских квадратов соответствуют конечным аффинным и проективным плоскостям, в вычислительной математике системы попарно ортогональных латинских квадратов используются при построении сеточных методов интегрирования, планирование эксперимента по схеме греко-латинского квадрата применяется для четырех факторов).

Греко-латинский квадрат – это квадрат N x N в каждой клетке которого стоят 2 числа, каждое из которых может принимать значения из множества М. При этом выполняются следующие условия:

В каждой строке и столбце каждое значение встречается один раз на первом месте в паре, и один раз на втором.

Каждое значение стоит в паре с каждым другим значением и с самим собой по одному разу.

Далее хотелось бы рассмотреть некоторые свойства латинских квадратов.

Группа из M латинских квадратов порядка N называется группой взаимно ортогональных квадратов, если любые два квадрата этой группы ортогональны (для любого порядка N существует не больше чем N-1 взаимно ортогональных квадратов).

Для любого порядка N, являющегося простым числом или степенью простого числа, существует ровно N-1 взаимно ортогональных квадратов.

Латинский квадрат нормализован, если в первой строке содержится тождественная перестановка чисел.

Теперь, когда рассмотрены свойства квадратов и некоторые их применения перейдем непосредственно к задаче, которая на практике демонстрирует применение ортогональных латинских квадратов.

Задача была поставлена случайно при подготовке к проведению XXII Международного экономического лагеря «Содружество». Когда я прописывала ход одного из мероприятий, мне потребовалось составить маршрутные листы таким образом, чтобы каждый отряд встретился с каждым, при этом пройдя все станции игры.

Итак, конечная формулировка задачи записывается так: «Имеется 8 отрядов и 7 станций. На каждой станции должны встретиться 2 отряда. Составить маршрутный лист таким образом, чтобы каждый отряд посетил каждую станцию один раз и встретился с каждым отрядом единожды».

Математически эту задачу можно сформулировать следующим образом: В квадрат 7 х 7 расставить все двухэлементные подмножества восьмиэлементного множества по одному экземпляру так, чтобы пересечения любой пары элементов в клетках в каждой строке (столбце) равнялись пустому множеству, а объединение элементов в каждой строке (столбце) равнялось восьмиэлементному множеству.

Решением данной задачи можно считать матрицу 7 х 7, строки и столбцы которой заполнены парами цифр (рис. 3).

Пусть L – решетка подмножеств множества. Обозначим $M_n(L)$ матрицы размера $n \times n$ такие, что для $A \in M_n(L)$-$A(i,j) \in L$. По аналогии с линейной алгеброй определим умножение матриц для $A, B \in M_n(L)$:

$$AB(i,j) = \bigvee_{k=1}^{n} (A(i,k) \wedge B(k,j)) \tag{1}$$

Латинские квадраты, греко-латинские квадраты и квадрат из настоящей работы обладают тем свойством, что $A \cdot A^T = E$, где Е – единичная матрица.

Для матрицы А транспонированная матрица A^T это матрица такая, что $A^T(i,j) = A(j,i)$.

№станции Время	1	2	3	4	5	6	7
10:00	1 2			3 4	7 8	5 6	
10:15		1 3	5 7	6 8		2 4	
10:30	6 7		1 4			3 8	2 5
10:45	4 8	2 6		1 5			3 7
11:00	3 5	4 7	2 8		1 6		
11:15		5 8			2 3	1 7	4 6
11:30			3 6	2 7	4 5		1 8

Рис. 1. Окончательный вариант маршрутного листа

Список литературы

1. Олехник С.Н. Старинные занимательные задачи. – М.: Наука, 1988.

2. Тараканников Ю.В. Комбинаторные свойства дискретных структур и приложения к криптологии. – М.: МЦНМО, 2014.

3. Тришин А.Е. Способ построения ортогональных латинских квадратов на основе подстановочных двучленов конечных полей. – М.: ТВП.

4. Тужилин М.Э. Об истории исследований латинских квадратов // Обозрение прикладной и промышленной математики. – 2012. – Т. 19. – Вып. 2. – С. 226–227.

5. Ширяев А.Н. Вероятность в теоремах и задачах (с доказательством и решениями). Книга 1 / А.Н. Ширяев, И.Г. Эрлих, П.А. Яськов. – М.: МЦНМО, 2014.

6. Шматков В.Д. Алгебры инцидентности над решетками // Успехи математических наук. – 1992 – Т. 47. – Вып. 4. – С. 217–218.

7. Euler L. Recherches sur une nouvelle espèce de quarrés magiques. – Middelburg, 1782.