Ермолаева Анжела Олеговна
магистрант
Институт математики
и механики им. Н.И. Лобачевского
ФГАОУ ВПО «Казанский (Приволжский)
федеральный университет»
г. Казань, Республика Татарстан
Галимянов Анис Фуатович
канд. физ.-мат. наук, доцент
ФГАОУ ВПО «Казанский (Приволжский)
федеральный университет»
г. Казань, Республика Татарстан

ИССЛЕДОВАНИЕ СРЕДСТВАМИ СИМВОЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ СХОДИМОСТИ МЕТОДА КОЛЛОКАЦИИ ДЛЯ ДРОБНО-ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

***Аннотация**: в данной статье авторами описывается метод коллокации для дробно-интегрального уравнения и средствами символьной математики показывается его сходимость. Результаты приводятся в виде графиков и таблиц.*

***Ключевые слова**: дробно-интегральные уравнения, символьная математика, метод коллокаций.*

Описание метода коллокации. Рассматривается интегральное уравнение вида:

$$Kx \equiv I^{\alpha}x(t) + \mu\int_0^1 \frac{h(t,\tau)}{\tau^{\beta}(1\text{-}\tau)^{\gamma}} x(\tau)d\tau = y(t),\ 0 \le t \le 1,\ (1.1)$$

$$I^{\alpha}x(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t\text{-}\tau)^{\alpha\text{-}1}x(\tau)d\tau,\ \alpha \in (0,\ 1)$$

где $h(t,\tau) \in C[0,1]^2$ и $y(t) \in C[0,1]$ – известные функции, $x(t)$ – искомая функция, числовые параметры γ и β удовлетворяют неравенству $-1 < \gamma, \beta < 1$, а μ – произвольный вещественный параметр.

Приближенное решение уравнения ищется в виде многочлена:

$$x_n(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k(t), (1.2)$$

где

$$\varphi_k(t) = \frac{k!(1+k-\alpha)t^{k-\alpha}}{\Gamma(2+k-\alpha)}, k = \overline{1,n}$$

φ_k были выбраны таким образом для того, чтобы выполнялось соотношение

$$I^{\alpha}\varphi_k(t) = t^k, k = \overline{1,n}$$

$c_k, k = \overline{1,n}$ находятся из СЛАУ, которая записывается в операторном виде следующим образом:

$$P_n K x_n = P_n y. (1.3)$$

Сходимость метода коллокации доказывается обычным способом.

Рассмотрим пример.

$$Kx \equiv I^{0.5}x(t) + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{(t-\tau)(\tau^2+\tau^3)}{(1-\tau)^{0.5}\tau^{0.5}}d\tau =$$

$$= \frac{2\sqrt{t}}{105\sqrt{\pi}}(48t^3 + 56t^2) + \frac{1}{256}\pi(88t-75) \ (3.1)$$

Точным решением этого уравнения является функция:

$$x(t) = t^2 + t^3$$

Покажем это. Используя пакет Mathematica, находим интегралы из (3.1):

$$\text{Integrate}[((t-\tau)^{-0.5}) * (\tau^2+\tau^3), \{\tau, 0, t\}] = 1.066667t^{2.5} + 0.914286t^{3.5}$$

$$I^{0.5}(t^2+t^3) = \frac{1}{\Gamma(0.5)}\int_0^t (t-\tau)^{-0.5}(\tau^2+\tau^3)d\tau$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}}(1.066667t^{2.5} + 0.914286t^{3.5})$$

$$\text{Integrate}\left[0.5 * (t-\tau)\,(\tau^2+\tau^3)/\left(((1-\tau)^{0.5}) * \tau^{0.5}\right), \{\tau, 0{,}1\}\right]$$

$$= -0.920325 + 1.079859t$$

$$\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{(t-\tau)(\tau^2+\tau^3)}{(1-\tau)^{0.5}\tau^{0.5}}d\tau = 1.079859t-0.920325$$

$$y(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}(1.066667t^{2.5} + 0.914286t^{3.5}) + (1.079859t-0.920325)$$

Приближенное решение уравнения (1.1), согласно методу коллокации, ищем в виде:

$$x_n(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k(t),$$

где

$$\varphi_k(t) = \frac{k!(0.5+k)t^{k\text{-}0.5}}{\Gamma(1.5+k)} = \frac{k!t^{k\text{-}0.5}}{\Gamma(0.5+k)}$$

Тогда согласно методу коллокации неизвестные коэффициенты находятся из СЛАУ:

$$K_n x_n(t_j) = y(t_j).$$

Так как рассматривается отрезок $[0, 1]$, узлы Чебышева будут вычисляться по формуле:

$$t_j = \frac{1}{2}(0+1) + \frac{1}{2}(1-0)cos\frac{2j+1}{2n+2}\pi = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}cos\frac{2j+1}{2n+2}\pi, j = \overline{1,n}$$

Подставляя, и учитывая, что

$$I^{0.5}\varphi_k(t) = t^k$$

Имеем:

$$\sum_{k=1}^{n} c_k \left(t_j^k + \frac{k!}{2\Gamma(0.5+k)}\int_0^1 \frac{(t_j\text{-}\tau)\tau^{k\text{-}1}}{(1\text{-}\tau)^{0.5}}d\tau\right)$$

$$= \frac{2\sqrt{t_j}}{105\sqrt{\pi}}\left(48{t_j}^3 + 56{t_j}^2\right) + \frac{1}{256}\pi(88t_j\text{-}75)$$

Решая эту систему для различных n, получим следующие результаты:

$n = 2.$ Приближенное решение имеет вид:

$$x_n(t) = 3.5546727543316945t^{0.5} + 5.698961995854026t^{1.5}$$

Графики точного и приближенного решений имеют (рис. 1).

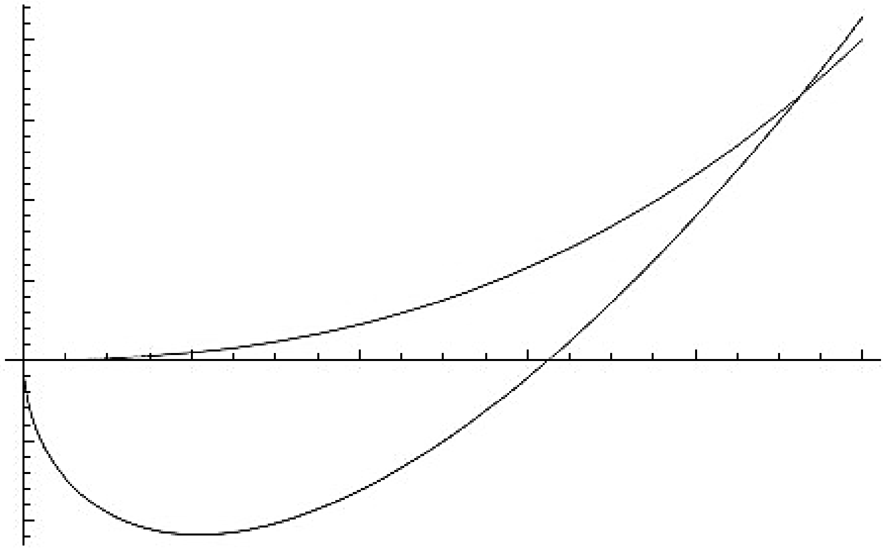

Рис. 1

Подсчитаем значения точного и приближенного решения, а также разность между ними в равноотстоящих точках (таблица 1).

Таблица 1

	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
$x(t)$	0.011	0.048	0.117	0.224	0.375	0.576	0.833	1.152	1.539	2
$x_n(t)$	– 0.944	–1.079	–1.01	–0.806	–0.499	–0.105	0.364	0.899	1.494	2.144
$\|x(t)$-x_n	0.955	1.127	1.127	1.03	0.874	0.681	0.469	0.253	0.045	0.144

$n = 3$ Приближенное решение имеет вид:

$$x_n(t) = \text{-}1.3774754864712475t^{0.5} + 1.9443041353027761t^{1.5} + 0.2246958251227442t^{2.5}$$

Графики точного и приближенного решений имеют вид (рис. 2).

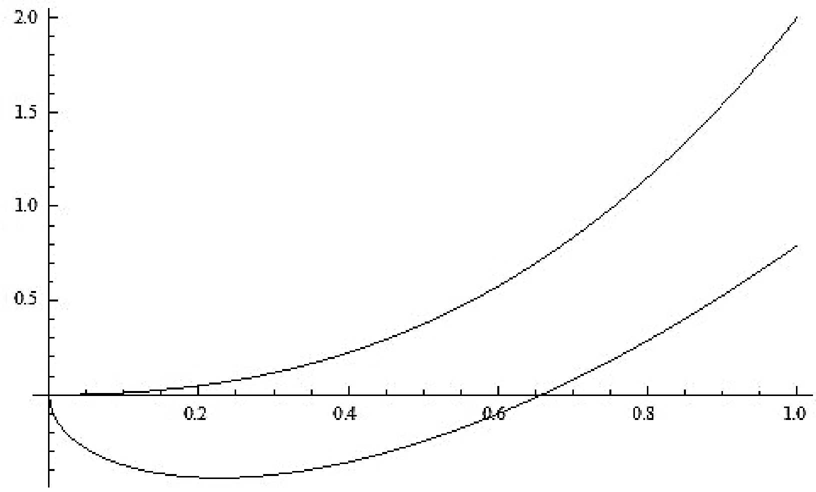

Рис. 2

Подсчитаем значения точного и приближенного решения, а также разность между ними в равноотстоящих точках (таблица 2).

Таблица 2

	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
$x(t)$	0.011	0.048	0.117	0.224	0.375	0.576	0.833	1.152	1.539	2
$x_n(t)$	– 0.373	–0.438	–0.424	–0.357	–0.247	–0.1	0.078	0.288	0.526	0.792
$\|x(t)$-x_n	0.384	0.486	0.541	0.581	0.622	0.676	0.755	0.864	1.013	1.208

$n = 4$ Приближенное решение имеет вид:

$$x_n(t) = -0.00340427953678517 4t^{0.5} + 0.26564542732118784t^{1.5} + 1.458805557928401t^{2.5} + 0.2821626770386192t^{3.5}$$

Графики точного и приближенного решений имеют вид (красное – точное решение $x(t)$, синее – приближенное решение $x_n(t)$ (рис. 3).

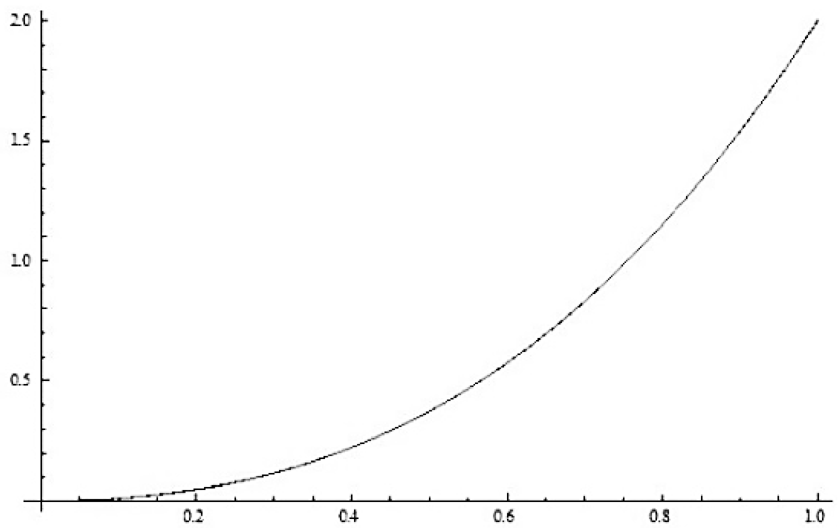

Рис. 3

Подсчитаем значения точного и приближенного решения, а также разность между ними в равноотстоящих точках (таблица 3).

Таблица 3

	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
$x(t)$	0.011	0.048	0.117	0.224	0.375	0.576	0.833	1.152	1.539	2
$x_n(t)$	0.012	0.049	0.117	0.224	0.374	0.575	0.832	1.151	1.539	2.003
$\|x(t)$-$x_n(t$	0.001	0.001	0	0	0.001	0.001	0.001	0.001	0	0.003

Отсюда явно прослеживается улучшение приближения при увеличении n.

Список литературы

1. Самко С.Г. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / С.Г. Самко, А.А. Килбас, О.И. Маричев. – Минск: Наука и техника, 1987. – 688 с.

2. Agachev J.R. On Justification of General Polynomial Projection Method for Solving Periodic Fractional Integral Equations / J.R. Agachev, A.F. Galimyanov // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2015. – Vol. 36. – №2. – P. 97–102.

3. Габдулхаев Б.Г. Прямые методы решения сингулярных интегральных уравнений первого рода. – Издательство Казанского университета, 1994. – 245 с.