Феоктистова Мария Геннадьевна
магистрант
Институт математики
и механики им. Н.И. Лобачевского
ФГАОУ ВПО «Казанский (Приволжский)
федеральный университет»
г. Казань, Республика Татарстан
Галимянов Анис Фуатович
канд. физ.-мат. наук, доцент
ФГАОУ ВПО «Казанский (Приволжский)
федеральный университет»
г. Казань, Республика Татарстан

МОДЕЛИРОВАНИЕ СРЕДСТВАМИ СИМВОЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ РЕШЕНИЯ ДРОБНОГО ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПРЯМЫМИ МЕТОДАМИ

***Аннотация**: в данной статье авторами излагается метод коллокации для приближенного решения дробно-дифференциального уравнения. Проведен численный эксперимент. Показана сходимость метода коллокаций.*

***Ключевые слова**: дробно-дифференциальные уравнения, сходимость, символьная математика, дробные производные, метод коллокаций.*

Пусть X и Y произвольные линейные нормированные пространства, а $X_n 0$ и Y_n, (n=1, 2, …) их произвольные линейные подпространства конечной размерности.

Рассмотрим уравнения:

$$Kx = y \quad (x \in X, y \in Y), \ (1.1)$$

$$K_n x_n = y_n \quad (x_n \in X_n, y_n \in Y_n), \ (1.2)$$

где K и K_n – аддитивные и однородные операторы, действующие из X в Y и из X_n в Y_n соответственно.

Уравнение (1.2) при любом фиксированном n эквивалентно системе линейных алгебраических уравнений порядка $N = N(n) = \dim X_n$ относительно коэффициентов разложения элемента $x_n \in X_n$ по базису пространства X_n. Этим и можно объяснить причину замены нашего бесконечномерного уравнения (1.1) конечномерным уравнением (1.2).

Рассмотрим дробное интегро-дифференциальное уравнение со слабо сингулярным ядром: $D_*^{\alpha} y(t) = \lambda_1 y(t) + \lambda_2 \int_0^1 k(t,s) y(s) ds + f(t)$. Подставляя в это уравнение значения $y(t) = t^2$, $\lambda_1 = \frac{1}{2}$, $\lambda_2 = 1$, $\alpha = \frac{1}{2}$, $k(t,s) = (t^2 + \cos s)$, получим следующее уравнение $D_*^{\frac{1}{2}}(t^2) = \frac{(t^2)}{2} + \int_0^1 (t^2 + \cos s) s^2 ds + f(t)$. Найдем для этого уравнения точное значение $f(t)$. Оператор D_*^{α} будем считать как дробную производную Капуто: $D_*^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{f'(\tau) d\tau}{(\mathrm{t} - \tau)^2}$.

Проводя необходимые вычисления, получим $f(t)$:

$$\frac{8\, t^{3/2}}{3\sqrt{\pi}} - \frac{5\, t^2}{6} + \sin(1) - 2\cos(1)$$

Далее решим исходное уравнение методом коллокации. Приближенное значение будем искать в виде полинома $y_n(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k(t)$. Функции $\varphi_k(t)$ имеют вид $\varphi_k(t) = \frac{k!(k+1-\alpha)t^{k-\alpha}}{\Gamma(k+2-\alpha)}$. Доказательство вида $\varphi_k(t)$ приведено в книге (см. например, в [2]). Подставляем приближенное значение $y_n(t)$ в исходное уравнение:

$$D_*^{\alpha} y_n(t) = \lambda_1 y_n(t) + \lambda_2 \int_0^1 k(t,s) y_n(s) ds + f(t),$$

$$D_*^{\alpha}\left(\sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k(t)\right) = \lambda_1\left(\sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k(t)\right) + \lambda_2 \int_0^1 k(t,s) \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k(s) ds + f(t),$$

$$D_*^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k(t)\right) = \frac{\left(\sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k(t)\right)}{2} + \int_0^1 \left(t^2 + \cos s\right)\left(\sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k(s)\right) ds + f(t) \Rightarrow$$

$$\sum_{k=1}^{n} c_k D_*^{\frac{1}{2}} \varphi_k(t) - \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k(t)\right) - \sum_{k=1}^{n} c_k \int_0^1 \left(t^2 + \cos s\right)\varphi_k(s) ds = f(t)$$

Неизвестные коэффициенты c_k определим из условий $D_*^{\alpha} y_n(t) - \lambda_1 y_n(t) - \lambda_2 \int_0^1 k(t,s) y_n(s) ds = f(t)|_{t=t_j}$. В качестве узлов возьмем узлы Чебышева 2 рода на отрезке $[0,1]$: $t_j = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\frac{2j+1}{2n+2}\pi$. Получаем СЛАУ n порядка относительно c_k:

$$\sum_{k=1}^{n} c_k \left[D_*^{\frac{1}{2}} \varphi_k(t_j) - \frac{1}{2}\varphi_k(t_j) - \int_0^1 \left(t_j^{\,2} + \cos s\right)\varphi_k(s) ds \right] = f(t_j),\ j = 1, n..$$

Решим эту систему для n=3:

solve	$-0.427989\,a + b\times(-0.472714) + c\times(-0.488774) = 0.2274$
	$0.0154474\,a - 0.32171\,b + c\times(-0.363129) = -0.0605$
	$0.289535\,a + b\times(-0.412478) + c\times(-0.361028) = -0.2292$

$a = -0.673308$ and $b = -0.167933$ and $c = 0.286744$,

где a, b, c равно c_1, c_2, c_3 соответственно. Получили $y_n(t)$= $0.51769\,t^{5/2} - 0.252656\,t^{3/2} - 0.759747\sqrt{t}$.

Близость приближенного решения к точному можно оценить по изображению на графике (рис. 1) и по таблице (таблица 1).

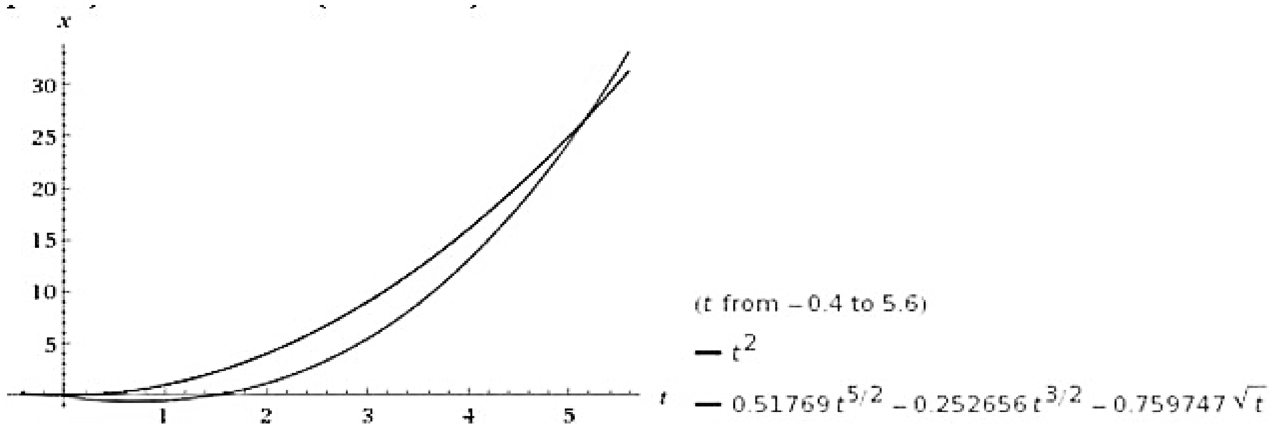

Рис. 1

Таблица 1

Разница приближенного значения функции от точного в точках

	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
$y(t)$	0,01	0,04	0,09	0,16	0,25	0,36	0,49	0,64	0,81	1
$y_n(t)$	–0,24661	–0,35311	–0,43213	–0,49204	–0,53503	–0,56156	–0,57139	–0,56398	–0,53867	–0,49471
$\lvert y - y_n(t) \rvert$	0,256606	0,393107	0,522127	0,652037	0,785034	0,921561	1,061387	1,203981	1,34867	1,494713

Список литературы

1. Габдулхаев Б.Г. Прямые методы решения сингулярных интегральных уравнений I-рода. Численный анализ. – Казань: Изд-во КГУ, 1994. – 288 с.

2. Agachev J.R. On Justification of General Polynomial Projection Method for Solving Periodic Fractional Integral Equations / J.R. Agachev, A.F. Galimyanov // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2015. – Vol. 36. – №2. – P. 97–102.

3. Самко С.Г. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / С.Г. Самко, А.А. Килбас, О.И. Маричев. – Минск: Наука и техника, 1987. – 688 с.