

Силина Анастасия Викторовна

магистрант

ФГБОУ ВПО «Магнитогорский государственный

технический университет им. Г.И. Носова»

г. Магнитогорск, Челябинская область

РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ СО СМЕШАННЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

Аннотация: решение обратной спектральной задачи Штурма-Лиувилля заключается в поиске возмущающего потенциала спектральными характеристиками: собственным числом и собственной функцией. Такие задачи встречаются при моделировании физических, технических, метеорологических и других процессов.

Ключевые слова: обратная задача, задача Штурма-Лиувилля, метод регуляризированных следов, собственные числа, собственные функции, интегральное уравнение, уравнение Фредгольма, метод регуляризации Тихонова.

Рассмотрим обратную спектральную задачу Штурма-Лиувилля со смешанными граничными условиями:

$$\begin{aligned} -y''(x) + p(x)y(x) &= \mu y(x), \\ \begin{cases} y(0) = 0, \\ y'(1) = 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (1)$$

Пусть известны собственные числа

$$\mu_k = \frac{(\pi + 2\pi k)^2}{4} + \frac{4}{(\pi + 2\pi k)^2} + \frac{4}{3}, k = 1, 2, 3, \dots \quad (2)$$

требуется найти возмущающий потенциал $p(x)$.

В работе [4], на основе метода регуляризированных следов [3], был разработан алгоритм поиска приближенных значений функции $p(x)$ в узлах дискретизации отрезка $[0, 1]$ для обратной задачи Штурма-Лиувилля со смешанными граничными условиями. Применим данный алгоритм для решения задачи (1)–(2).

Поиск собственных чисел и собственных функций вспомогательной краевой задачи:

$$-u''(x) = \lambda u(x), \quad (3)$$

$$\begin{cases} u(0) = 0, \\ u'(1) = 0. \end{cases}$$

Общее решение одномерного уравнения Лапласа имеет вид:

$$u(x) = C_1 \cos(\sqrt{\lambda}x) + C_2 \sin(\sqrt{\lambda}x).$$

Вычислим производную

$$u'(x) = -C_1 \sqrt{\lambda} \sin(\sqrt{\lambda}x) + C_2 \sqrt{\lambda} \cos(\sqrt{\lambda}x).$$

Подставим в полученные выражения граничные условия задачи (3), получим:

$$\begin{cases} C_1 \cos(0) + C_2 \sin(0) = 0, \\ -C_1 \sqrt{\lambda} \sin(\sqrt{\lambda}) + C_2 \sqrt{\lambda} \cos(\sqrt{\lambda}) = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 0, \\ \cos(\sqrt{\lambda}) = 0, \end{cases}$$

$$\lambda_k = \left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right)^2, k = 1, 2, 3, \dots$$

$$u_k(x) = C_k \sin(\sqrt{\lambda_k}x).$$

Множители C_k найдем из условия нормировки $\|u_k(x)\| = 1$, $u_k(x) \in L_2[0,1]$:

$$\int_0^1 C_k^2 \sin^2(\sqrt{\lambda_k}x) dx = 1 \Rightarrow C_k = \frac{1}{\sqrt{\int_0^1 \sin^2(\sqrt{\lambda_k}x) dx}} = \sqrt{2}.$$

Таким образом, собственные функции задачи (3) имеют вид:

$$u_k(x) = \sqrt{2} \sin\left(\left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right)x\right).$$

2. Решение интегрального уравнения Фредгольма первого рода:

$$\int_0^1 K(x,s)p(s)ds = f(x), c \leq x \leq d, \quad (4)$$

где $K(x_k, s) = u_k^2(s)$, $f(x_k) = \mu_k - \lambda_k$, $k = \overline{1, K}$, K – количество узлов дискретизации.

Решим интегральное уравнение (4) численно, используя метод регуляризации Н.А. Тихонова [1]. Параметр регуляризации α вычислим методом обобщенной невязки [2].

Чтобы определить точность полученного решения, вычислим поточенную абсолютную погрешность ζ_k :

$$\zeta_k = \left| f(x_k) - \int_0^1 K(x_k, s)p(s) ds \right|$$

и невязку δ :

$$\delta = \left\| f(x_k) - \int_0^1 K(x_k, s)p(s) ds \right\|.$$

В таблице 1 приведены результаты вычислений для $K = 21$.

Таблица 1

k	x_k	$p(x_k)$	ζ_k
1	0,00	0,8832	0,0011
2	0,05	0,8855	0,0007
3	0,10	0,9366	0,0008
4	0,15	0,9852	0,0008
5	0,20	1,0351	0,0008
6	0,25	1,0849	0,0008
7	0,30	1,1348	0,0008
...	...	...	...
15	0,70	1,5339	0,0008
16	0,75	1,5837	0,0008
17	0,80	1,6336	0,0008
18	0,85	1,6835	0,0008
19	0,90	1,7321	0,0007
20	0,95	1,7833	0,0007
21	1,00	1,7856	0,0008

Невязка приближенного решения $\delta = 0,0022$. Средняя поточечная абсолютная погрешность $\zeta = 0,0007$. Параметр регуляризации $\alpha = 0,16 \cdot 10^{-14}$. Маленькие значения невязки и поточечных погрешностей показывают «близость» полученного приближенного и точного решений.

3. Интерполирование функции.

Для нахождения приближенных значений потенциала $p(x)$ вне узлов дискретизации $\{x_k\}_{k=1}^{21}$ интерполируем дискретную функцию $\{p(x_k)\}_{k=1}^{21}$ полиномом третьей степени, получим $p(x) = -0,4176x^3 + 0,6266x^2 + 0,7276x + 0,8661$ (рис. 1).

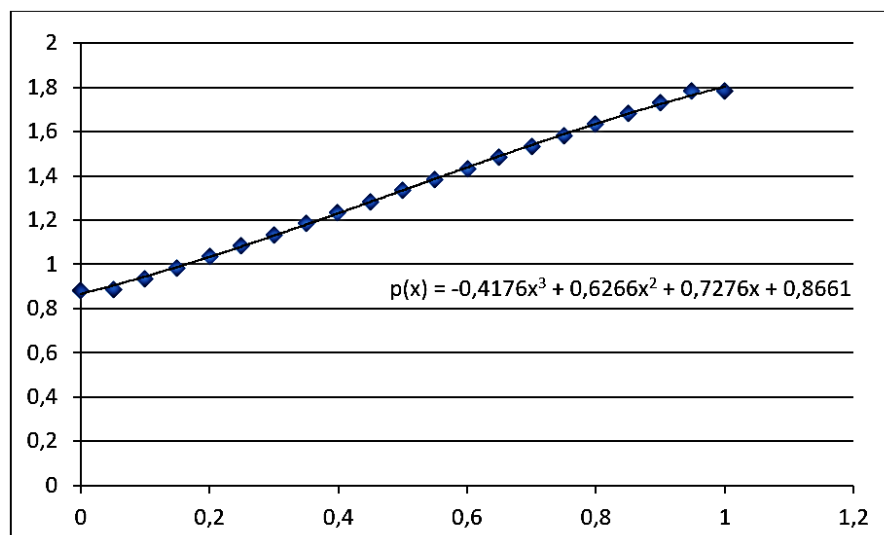


Рис. 1. Восстановленный потенциал

Средняя абсолютная поточечная погрешность интерполяции равна 0,0066. Таким образом, наибольшая погрешность восстановления потенциала $p(x)$ возникает на этапе интерполяции.

Список литературы

1. Васильева А.Б. Интегральные уравнения / А.Б. Васильева, Н.А. Тихонов. – М.: МГУ, 1989. – 156 с.
2. Верлань А.Ф. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы: Справочное пособие / А.Ф. Верлань, В.С. Сизиков. – Киев: Наукова думка, 1986. – 544 с.
3. Кадченко С.И. Метод регуляризованных следов / С.И. Кадченко // Вестник ЮУрГУ. Сер. «Математическое моделирование и программирование». – 2009. – Вып. 4. – №37 (170). – С. 4–23.
4. Кадченко С.И. Численный метод решения обратных спектральных задач, порожденных оператором Штурма-Лиувилля со смешанными граничными условиями / С.И. Кадченко, А.В. Силина // Актуальные вопросы и перспективы развития математических и естественных наук: Сборник научных трудов по итогам научно-практической конференции. – №3. – г. Омск, 2016. – С. 9–13.
5. Кадченко С.И. Численный метод решения обратных задач, порожденных возмущенными самосопряженными операторами, методом регуляризованных

следов / С.И. Кадченко // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. – 2013. – №6 (107). – С. 23–29.

6. Кадченко С.И. Численный метод нахождения собственных значений дискретных полуограниченных снизу операторов / С.И. Кадченко, Л.С. Рязанова // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математическое моделирование и программирование». – 2011. – №17 (234). – Вып. 8. – С. 46–51.

7. Кадченко С.И. Численный метод решения обратных задач, порожденных возмущенными самосопряженными операторами / С.И. Кадченко // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математическое моделирование и программирование». – 2013. – Т. 6. – №4. – С. 15–25.