Каменева Анастасия Евгеньевна
магистрант
Горбунова Алина Викторовна
студентка
ФГБОУ ВО «Магнитогорский государственный
технический университет им. Г.И. Носова»
г. Магнитогорск, Челябинская область

ПОСТРОЕНИЕ ИНТЕРПОЛЯЦИОННОГО СПЛАЙНА ПРОИЗВОЛЬНОЙ СТЕПЕНИ

Аннотация*: в данной статье рассматривается понятие интерполяционного полинома произвольной степени и способы его построения.*

Ключевые слова*: интерполяция, математические методы.*

Интерполяция – операция приближения функции, заданной в отдельных точках внутри некоторого заданного промежутка. Простейшая задача интерполяции заключается в следующем. На отрезке $[x_0, x_n]$ заданы n точек x_k (k = 0, 1, 2, …, n), называемые узлами интерполяции, и значения некоторой функции f(x) в этих точках $f(x_0) = y_0, f(x_1) = y_1,\ldots,f(x_n) = y_n$. Требуется построить интерполирующую функцию *F(x),* принимающую в узлах интерполяции те же значения, что и *f(x),* т.е. $F(x_0) = y_0,\ F(x_1) = y_1,\ldots\ ,F(x_n) = y_n$. Геометрически это означает, что требуется найти некоторую кривую*y* = *F(x)* определенного типа, проходящую через заданный набор точек (x_k, y_k), *k* = 0, 1, 2, …, n.

Пусть задана табличная функция:

$$\big(x_k, f(x_k)\big), k = 1,2,\ldots,n,$$

где x_k – упорядоченные по возрастанию абсциссы узлов интерполирования.

Рассмотрим задачу о нахождении коэффициентов кубического сплайна. Обозначим его *s*(*x*); сплайн образован (*n*-1) кубическими функциями

$$P_k(x) = a_k + \ b_k(x\text{-}x_k) + c_k(x\text{-}x_k)^2 + d_k(x\text{-}x_k)^3,$$

которые определены на отрезке [x_k,x_{k+1}] и которые должны удовлетворять нижеприведенным условиям в узлах интерполирования, состоящими в прохождении графика сплайна через заданные точки и наличия у сплайна определенной гладкости.

1. Условия прохождения через заданные точки

$$P_k(x_k) = f(x_k), P_k(x_{k+1}) = f(x_{k+1}), k = 1,2,3, \dots, n\text{-}1.$$

2. Условия непрерывности первой производной во внутренних точках

$$\frac{dP_k}{dx}(x_k) = \frac{dP_{k+1}}{dx}(x_k), k = 2,3, \dots, n\text{-}1.$$

3. Условия непрерывности второй производной во внутренних точках

$$\frac{d^2P_k}{dx^2}(x_k) = \frac{d^2P_{k+1}}{dx^2}(x_k), k = 2,3, \dots, n\text{-}1.$$

Кроме этого, наложим на сплайн следующие граничные условия (для однозначного определения его коэффициентов):

1. На левой границе отрезка $s(x_1) = 0$, т. е.

$$\frac{d^2P_1}{dx^2}(x_1) = 0;$$

2. На правой границе отрезка $s(x_n)=0$,

$$\frac{d^2P_{n\text{-}1}}{dx^2}(x_{n\text{-}1}) = 0.$$

Данные выкладки можно обобщить для сплайна любой степени. С ростом степени будут добавляться условия для производных (для сплайна nстепени – n условий, (n-1)-я производная). Например, для сплайна четвертой степени будем искать:

$$P_k(x) = a_k + \ b_k(x\text{-}x_k) + c_k(x\text{-}x_k)^2 + d_k(x\text{-}x_k)^3 + e_k(x\text{-}x_k)^4,$$

для которого будут выполняться следующие условия:

1. $P_k(x_k) = f(x_k), P_k(x_{k+1}) = f(x_{k+1}), k = 1,2,3, \dots, n\text{-}1.$
2. $\frac{dP_k}{dx}(x_k) = \frac{dP_{k+1}}{dx}(x_k), k = 2,3, \dots, n\text{-}1.$
3. $\frac{d^2P_k}{dx^2}(x_k) = \frac{d^2P_{k+1}}{dx^2}(x_k), k = 2,3, \dots, n\text{-}1.$
4. $\frac{d^3P_k}{dx^3}(x_k) = \frac{d^3P_{k+1}}{dx^3}(x_k), k = 2,3, \dots, n\text{-}1.$

А также граничные условия:

$$\frac{d^3 P_1}{dx^3}(x_1) = 0,$$

$$\frac{d^3 P_{n\text{-}1}}{dx^3}(x_{n\text{-}1}) = 0.$$

Опираясь на данные выкладки можно построить интерполяционный полином любой степени. Степень сплайна, используемого при решении конкретной задачи, как правило, определяется в зависимости от начальных данных и целей решения. Высокая степень сплайна обеспечивает большую точность результата, низкая – повышает быстродействие.

Список литературы

1. Боглаев Ю.П. Вычислительная математика и программирование. – М.: Высшая Школа, 1990.

2. Воробьева Г.Н. Практикум по вычислительной математике / Г.Н. Воробьева, А.Н. Данилова. – М.: Высшая Школа, 1990. – 207 с.