***Шонин Максим Юрьевич***
учитель математики
МОУ «Петропавловская СОШ»
п. Петропавловский, Челябинская область
магистрант
ФГБОУ ВПО «Магнитогорский государственный
технический университет им. Г.И. Носова»
г. Магнитогорск, Челябинская область

# О НЕОБХОДИМОСТИ В ИЗУЧЕНИИ НЕРАВЕНСТВ В КУРСЕ МАТЕМАТИКИ

***Аннотация****: в данной статье автором рассматриваются общие вопросы, касающиеся неравенств, их доказательств, а также их применения.*

***Ключевые слова****: неравенство, функция, логарифмирование, потенцирование.*

Математика – одна из древнейших наук. Не существует таких явлений природы, технических или социальных процессов, которые не были бы предметом изучения математики. Причем для нее материальный объект исследования не имеет решающего значения, важны примененные для этого понятия и определения.

Уже в школе многие сталкиваются с основными понятиями математики, такими как уравнения, функция, предел, интеграл, неравенство, производная и многими другими. Целью данной статьи будет изучения одного из основных понятий – неравенство.

Что же такое неравенство? Если заглянуть в энциклопедический словарь, то можно прочитать, что неравенством называется два числа или математических выражения, соединенных одним из знаков: $>$(больше), $<$(меньше), $\geq$(больше или равно), $\leq$(меньше или равно).

Зная, что такое неравенство, невольно возникает вопрос, а где они применяются?

С помощью неравенств формулируются основные понятия из различных разделов математики, такие как предел, непрерывная функция, монотонная функция, норма и метрика линейных пространств, равномерной сходимости функции, а также целого ряда и других важных понятий. Неравенства применяют для задания с их помощью числовых множеств: отрезок $a \le x \le b$, промежуток $a < x \le b$или $a < x \le b$, луч $x < a$ или $x < a$и так далее.

На языке неравенств нередко формулируются постановки задач во многих приложениях математики. Например, многие экономические задачи сводятся к исследованию систем линейных неравенств с большим числом переменных. Часто то или иное неравенство служит важным вспомогательным средством, основной леммой, позволяющей доказать или опровергнуть существование каких – либо объектов (скажем, решений уравнений), оценить их количество, провести классификацию. Например, чтобы классифицировать все правильные многогранники, нужно прежде всего вспомнить, какие углы могут иметь правильные многоугольники, и воспользоваться неравенством: сумма величин плоских углов выпуклого многогранного угла не больше $360^0$.

Неравенства – это не только вспомогательный инструмент. В каждой области математики – алгебре и теории чисел, геометрии и топологии, теории вероятностей и теории функций, математической физике и теории дифференциальных уравнений, теории информации и дискретной математике – можно указать фундаментальные результаты, формулируемые в виде неравенств.

В многих разделах математики, особенно в математическом анализе, в прикладной математике, неравенства встречаются значительно чаще, чем равенства. Скажем, решения каких-то практических важных уравнений лишь по счастливой случайности удается найти точно – в виде числа или формулы, а для приближенного решения в математике всегда следует указать оценку погрешности, то есть доказать некоторое неравенство. Как утверждает А.П. Савинв своем словаре, бывает, что для доказательства неравенства приходится использовать весьма тонкие геометрические или аналитические соображения [2]. Поэтому помогает знание основных часто встречающихся классических тождественных неравенств. К таким неравенствам можно отнести следующие, которые носят имена людей, получивших: Коши, Гёльдера, Минковского, Коши – Буняковского, Йенсена, а также и менее знаменитые, но весьма интересные. Рассмотрим доказательства некоторые из них.

1. Неравенство Коши о среднем арифметическом и среднем геометрическом [1]:

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n} \; (x_i > 0).$$

Пусть данное неравенство верно. Прологарифмируем обе части данного неравенства и воспользуемся свойствами логарифмов: $\log_a \prod_{i=1}^{n} b_i = \sum_{i=1}^{n} \log_a b_i$ и $\log_a b^n = n \log_a b$. Возьмем в качестве $a$ число $e$. Тогда: $\ln\left(\frac{1}{n}x_1 + \ldots + \frac{1}{n}x_n\right) \geq \frac{1}{n}\ln(x_i) + \ldots + \frac{1}{n}\ln(x_n)$. Полученное неравенство напоминает неравенство Йенсена для функции $y = \ln(x)$, однако, знак неравенства не тот. Объединяется это тем, что функция $y = \ln(x)$, не вупуклая, а вогнутая.

Проведенное доказательство является как бы доказательством «наоборот», то есть из предположения о верности исходного неравенства с помощью свойств числовых неравенств получили новое неравенство, истинность которого легко доказывается с помощью неравенства Йенсена. Если теперь провести выкладки в обратном порядке, используя обратную операцию к логарифмированию потенцирование.

Таким образом, мы доказали неравенство Коши о среднем и среднем геометрическом.

2. Неравенство Гёльдера:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{\frac{1}{q}},$$

где $a_i > 0, b_i > 0$, а $p$ и $q$ - положительные числа, такие что $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

В данном случае для доказательства рассмотрим функцию $y = x^p$. Запишем для нее неравенство Йенсена вида:

$$\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}\right)^p \le \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i^p}{\sum_{i=1}^{n} m_i},$$

так как $m_i$ –масса, а значит больше нуля. Умножим обе части неравенства на $\left(\sum_{i=1}^{n} m_i\right)^p$, которая является положительным числом:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} m_i x_i\right)^p \le \sum_{i=1}^{n} m_i x_i^p \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} m_i\right)^{p-1}.$$

Отсюда $\sum_{i=1}^{n} m_i x_i \le \left(\sum_{i=1}^{n} m_i x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} m_i\right)^{\frac{p-1}{p}}$.

Так как $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, то $\frac{1}{q} = \frac{p-1}{p}$ и тогда будем иметь:

$$\sum_{i=1}^{n} m_i x_i \le \left(\sum_{i=1}^{n} m_i x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} m_i\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Положим теперь $m_i = b_i^q$ и $x_i = a_i b_i^{1-q}$ и получаем:

$$\sum_{i=1}^{n} b_i^q a_i b_i^{1-q} \le \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q a_i b_i^{(1-q)p}\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

По свойству степени и исходя из того, что $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, то $p + q - pq = 0$, получаем:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \le \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Таким образом, мы доказали неравенство Гёльдера.

3. Неравенство Минковского:

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n} + \sqrt[n]{b_1 \cdot b_2 \cdot \ldots \cdot b_n} \le \sqrt[n]{(a_1 + b_1)\cdot(a_2 + b_2)\cdot \ldots \cdot(a_n + b_n)} \quad (a_i, b_i > 0).$$

Пусть данное неравенство верно. Поделим обе части неравенства на $\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}$ и получим:

$$1+\left(\frac{b_1}{a_1}\right)^{\frac{1}{n}}\left(\frac{b_2}{a_2}\right)^{\frac{1}{n}}\ldots\left(\frac{b_n}{a_n}\right)^{\frac{1}{n}} \le \left(1+\frac{b_1}{a_1}\right)^{\frac{1}{n}} \cdot \ldots \cdot \left(1+\frac{b_n}{a_n}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Обозначим через $x_i = \ln\left(\frac{b_i}{a_i}\right)$ и заменим $\frac{b_i}{a_i}$ на $e^{x_i}$.

Запишем наше неравенство в виде:

$$1+e^{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}x_i} \le \prod\left(1+e^{x_i}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Прологарифмируем обе части неравенства:

$$\ln\left(1+e^{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}x_i}\right) \le \prod\frac{1}{n}\ln\left(1+e^{x_i}\right).$$

Это есть неравенство Йенсена для выпуклой функции $y=\ln\left(1+e^{x_i}\right)$. Как и при доказательстве неравенства Коши, исходя из того, что все наши шаги были согласованы со свойствами числовых неравенств, можно сделать вывод, что неравенства Минковского доказано.

Как было указано выше, целью данной статьи было изучение понятия неравенства. В ней также были доказаны некоторые классические неравенства: Коши, Гёльдера, Минковского. Эти неравенства нашли свое применение не только в разделах высшей математики, но и в школе, где идёт углубленное изучение математики.

***Список литературы***

1. Шкапенюк М. Выпуклость функций и доказательство неравенств. – 1980. – №3.

2. Энциклопедический словарь юного математика // Составитель А.П. Савин. – М.: Педагогика, 1985.