Солохина Людмила Николаевна

учитель математики

МБОУ гимназия №5

г. Феодосия, Республика Крым

ПОДГОТОВКА ШКОЛЬНИКОВ К ОЛИМПИАДАМ ПО МАТЕМАТИКЕ

***Аннотация**: в данной статье представлен комплекс задач, который может быть использован учащимися и преподавателями для подготовки к олимпиадам различного уровня (школьного, муниципального). Устойчивый интерес к математике формируется в 14–15 лет, но развивать этот интерес необходимо раньше. Тогда учащиеся почувствуют, что размышления над трудными, нестандартными задачами могут доставить истинную радость.*

***Ключевые слова**: олимпиада, математика, текстовые задачи, решение.*

Цель методической разработки:

– углубление и расширение знаний учащихся по математике;

– развитие математического кругозора, логического мышления;

– развитие устойчивого интереса учащихся к математике;

– разностороннее развитие личности.

Задачи методической разработки:

– развитие математических способностей и логического мышления у учащихся;

– развитие у учащихся умения работать со справочной и научно – популярной литературой;

– приобретение учащимися навыков в решении разнообразных задач из различных разделов курса математики, в том числе, требующих поиска путей и способов решения.

Задача №1.

Василий и его друзья стали в круг. Оказалось, что для каждого ребёнка по обе стороны стояли дети одного пола. Девочек среди Васиных друзей было 5. А сколько мальчиков?

Решение.

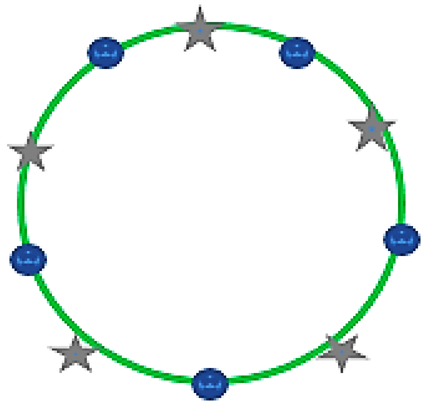

Рис. 1

Начертим круг и отметим положение Василия в круге. Если предположить, что по обе стороны от Василия стоят мальчики, то это будет означать, что в круге будут стоят все ребята одного пола – мальчики, что противоречит условию задачи. Значит, по обе стороны от Василия стоят девочки. Ну и далее, понятно, что девочки чередуются с мальчиками. Вывод: в круге 5 мальчиков и 5 девочек.

Ответ: Васиных друзей – мальчиков – 4.

Задача №2.

В магазин привезли в коробке 5 пар красных и 5 пар синих комнатных тапочек. Найти наименьшее число тапочек, которое нужно взять из коробки, чтобы среди них оказалось хотя бы одна пара одного цвета.

Решение.

Наихудший вариант – то, когда из коробки взять 10 штук тапочек и они все окажутся левыми или правыми. И, чтобы, наконец, получилась пара тапочек (правый и левый), то надо вытащить ещё один тапочек. Итого: 11 тапочек.

Ответ: 11.

Задача №3.

В классе трём учащимся поручили надуть шары и каждый должен был надуть $\frac{1}{3}$ всех шаров. Учащиеся не могли одновременно прийти в школу и каждый приходил, когда ему было удобно. Первый учащийся пришёл и надул $\frac{1}{3}$

всех шаров и ушёл. Второй ученик пришёл, надул $\frac{1}{3}$ шаров и ушёл. Третий учащийся пришёл, надул $\frac{1}{3}$ шаров и ушёл. Сколько шаров должны были надуть учащиеся, если третий учащийся надул 12 шаров?

Решение.

Если третий учащийся надул 12 шаров и это $\frac{1}{3}$ шаров, которые не были надуты перед приходом третьего ученика, то шаров было $12 \times 3 = 36$ (шаров). Теперь найдём, сколько шаров было перед приходом второго ученика: $36 : 2 \times 3 = 54$ (шаров). Найдём сколько шаров было перед приходом первого учащегося, т.е. сколько было всего шаров? $54 : 2 \times 3 = 81$ (шаров).

Ответ: 81.

Задача №4.

Билеты с номерами от 0000 до 9999 были проданы на спектакль. У некоторых посетителей оказались счастливые билеты. Билет считается счастливым, если сумма первых двух цифр равна сумме двух последних цифр. Докажите, что общее количество счастливых билетов – чётно.

Решение.

Если у билета $\overline{abcd}$ первые две цифры совпадают с последними двумя, то таких билетов столько же, сколько билетов $\overline{ab}$, т. е. их 100 – чётное число. Если $\overline{ab} \neq \overline{cd}$, то вместе с билетом $\overline{abcd}$ обязательно найдётся счастливый билет $\overline{cdab}$. Т.е. такие счастливые билеты можно будет разбить на пары, а потому их общее число чётно.

Ответ: что и требовалось доказать.

Задача №5.

В блокноте пронумерованы страницы от 1 до 200. Василий вырвал из блокнота 35 листов в произвольном порядке и нашёл сумму чисел, обозначавших номер страницы. Мог ли Василий получить число 2016?

Решение.

На каждом листе записаны 2 числа – одно чётное, другое – нечётное. Их сумма – нечётна. А сумма 35-ти нечётных чисел – нечётна (т. к. 35 -нечётное число). Число 2016 – чётное число. Потому, Василий не мог получить 2016.

Ответ: не мог.

Задача №6.

Можно ли составить магический квадрат из первых 16, 25 или 36 простых чисел?

Решение.

Среди первых 16,25 или 36 простых чисел одно число -2 – чётное число, остальные нечётные. Потому, в столбике, где стоит число 2, сумма цифр будет нечётная, а во всех других столбцах – чётной. Следовательно, такого магического квадрата не существует.

Ответ: не существует.

Задача №7.

10 учащихся построены в шеренгу. Разрешается меняться местами каким-либо образом 2-м учащимся, стоящих через одного учащегося. Может ли таким способом учащиеся стать в обратном порядке?

Решение.

Учащиеся, которые стоят на нечётных местах, могут перейти на нечётные места, а учащиеся, которые стоят на чётных местах, должны перейти на места с нечётными номерами согласно условию задачи. Учащийся, стоящий последним (10-ым) не может оказаться на 1 месте, т.к. это место имеет нечётный номер.

Ответ: нельзя.

Задача №8.

На плоскости начерчен круг с центром в начале координат и радиусом 2 (3; 2015; 2016 единичных отрезков). В каждой из точек плоскости, которые лежат внутри круга и имеют целочисленные координаты, стоит фишка. В некоторый момент времени каждую фишку переставляют на 1 единичный отрезок либо влево, либо вправо, либо вверх, либо вниз, оставаясь внутри круга. Обязательно ли, передвигаясь, две фишки встретятся в одной точке?

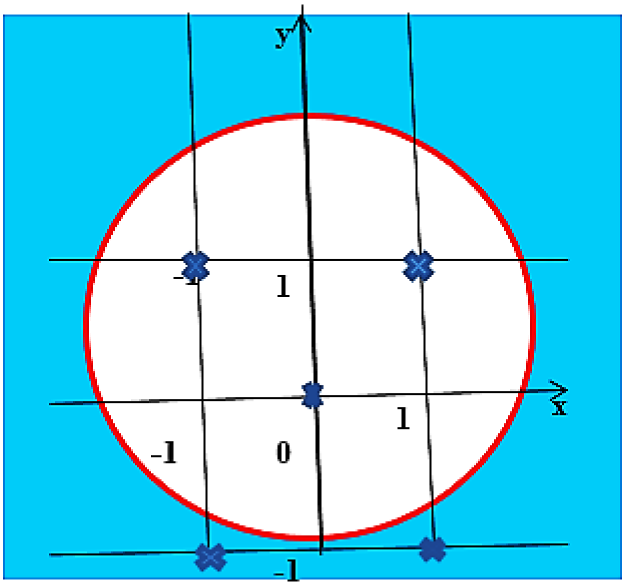

Рис. 2

Решение.

Да, обязательно. Это следует из того, что количество фишек внутри круга – нечётное число. Каждая фишка передвигается и изменяется её одна из координат на единицу. Значит, изменяется сумма абсциссы и ординаты точки, в которой находилась фишка. Если сумма была нечётной, то она становится чётной, а если сумма была чётно, она становится нечётной. Пусть фишки переставили. Тогда количество фишек с чётной суммой координат равно количеству фишек с нечётной суммой координат. И, значит, общее количество фишек чётно. С одной стороны, у нас при рассуждении получилось, что количество фишек внутри круга – нечётное число, а с другой – чётное. Это означает, что не для каждой фишки найдётся отдельная свободная точка, т.е. в какой точке обязательно окажутся 2 фишки.

Ответ: Да, обязательно.

Задача №9.

Найти наименьшее число, которое при делении на 5, 6, 7 даёт в остатке 4, а на 8 делится без остатка.

Решение.

1. НОК (5, 6, 7) = 210;

2. 210 + 4 = 214 – наименьшее число, которое делится на 5,6,7 и даёт в остатке 4;

3. 210 × 2 = 420 – число, которое делится на 5, 6, 7 без остатка;

4. 420 + 4 = 424 – наименьшее число, которое делится на 5,6,7 и даёт в остатке 4, и делится на 8 без остатка;

Ответ: 424.

Задача №10.

Найти наименьшее число, которое при делении на 2, 3, 4, 6, 7, 8 даёт в остатке 1, а на 9 делится без остатка.

Решение.

1. НОК (2, 3, 4, 6, 7, 8) = 596;

2. 596 + 1 = 597 – наименьшее число, которое делится на 2, 3, 4, 6, 7, 8 с остатком 1;

3. 596 × 4 = 2384 – число, которое делится на 2, 3, 4, 6, 7, 8 без остатка;

4. 2384 +1 = 2385 – число, которое делится на 2, 3, 4, 6, 7, 8 с остатком 1;

5. 2385 ⋮ 9, так как (2 + 3 + 8 + 5) ⋮ 9, 18 ⋮ 9.

Ответ: 2385.

Задача №11.

Доказать, что не существует числа, которое при делении на 2, 3, 4, 5, 6, 7 даёт в остатке 1, а на 8 делится без остатка.

Решение.

1. НОК (2,3,4,5,6,7) = 420;

2. 420 + 1 = 421 – наименьшее число, которое делится на 2, 3, 4, 5, 6, 7 с остатком 1;

3. Если 420 умножить на любое число, то в результате получится число, оканчивающиеся на 0.

4. Далее, к полученному числу прибавляем 1, получается число, оканчивающееся на 1.

5. Вывод: нет числа, оканчивающееся на 1 и делящееся на 8 без остатка, так как числа, которые делятся на 8, должно оканчиваться на 8, 6, 4, 2, 0 – чётные цифры.

Ответ: что и требовалось доказать.

Задача №12.

Найти наименьшее число, которое при делении на 6, 7, 8, 9 даёт в остатке 1, а на 11 делится без остатка.

Решение.

1. НОК (6, 7, 8, 9) = 504;

2. 504 + 1 = 505 – наименьшее число, которое делится на 6, 7, 8, 9 с остатком 1;

3. 504 × 6 = 3024 – число, которое делится на 6, 7, 8, 9 без остатка;

4. 3024 + 1 = 3025 – наименьшее число, которое делится на 6, 7, 8, 9 с остатком 1 и на 11 без остатка.

3025 : 11 = 275.

Ответ: 3025.

Задача №13.

Найти наименьшее число, которое при делении на 6, 7, 8, 9 даёт в остатке 2, а на 11 делится без остатка.

Решение.

1. НОК (6, 7, 8, 9) = 504;

2. 504 + 2 = 506 – наименьшее число, которое делится на 6, 7, 8, 9 с остатком 2;

3. 504 × 12 = 6048 – число, которое делится на 6, 7, 8, 9 без остатка;

4. 6048 + 2 = 6050 – наименьшее число, которое делится на 6, 7, 8, 9 с остатком 2 и на 11 без остатка.

6050 : 11 = 550.

Ответ: 6050.

Задача №14.

Найти наименьшее число, которое при делении на 6, 7, 8, 9 даёт в остатке 3, а на 11 делится без остатка.

Решение.

1. НОК (6, 7, 8, 9) = 504;

2. 504 + 3 = 507 – наименьшее число, которое делится на 6, 7, 8, 9 с остатком 3;

3. $504 \times 7 = 3528$ – число, которое делится на 6, 7, 8, 9 без остатка;

4. 3528 + 3 = 3531 – наименьшее число, которое делится на 6, 7, 8, 9 с остатком 3 и на 11 без остатка.

3531 : 11 = 321.

Ответ: 3531.

Задача №15.

Найти наименьшее число, которое при делении на 6, 7, 8, 9 даёт в остатке 4, а на 11 делится без остатка.

Решение.

1. НОК (6, 7, 8, 9) = 504;

2. 504 + 4 = 508 – наименьшее число, которое делится на 6, 7, 8, 9 с остатком 4;

3. $504 \times 2 = 1008$ – число, которое делится на 6, 7, 8, 9 без остатка;

4. 1008 + 4 = 1012 – наименьшее число, которое делится на 6, 7, 8, 9 с остатком 4 и на 11 без остатка.

1012 : 11 = 92.

Ответ: 1012

Задача №16.

Найти наименьшее число, которое при делении на 6, 7, 8, 9 даёт в остатке 5, а на 11 делится без остатка.

Решение.

1. НОК (6, 7, 8, 9) = 504;

2. $504 + 5 = 509$ – наименьшее число, которое делится на 6, 7, 8, 9 с остатком 4;

3. $504 \times 19 = 9576$ – число, которое делится на 6, 7, 8, 9 без остатка;

4. $9576 + 5 = 9581$ – наименьшее число, которое делится на 6, 7, 8, 9 с остатком 4 и на 11 без остатка.

$9581 : 11 = 871$.

Ответ: 9581.

Задача №17.

Мерьем начертила прямоугольник со сторонами 132 мм и 34 мм и стала «отрезать» от него квадраты наибольшей величины. Какой длины была сторона последнего квадрата, который «отрезала» Мерьем?

Решение.

$132 = 34 \times 3 + 30$ – Мерьем отрезала 3 квадрата со стороной 34 мм, остался прямоугольник 34 мм × 30 мм;

$34 = 1 \times 30 + 4$ – Мерьем отрезала квадрат со стороной 30 мм, остался прямоугольник 30 мм × 4мм;

$30 = 4 \times 7 + 2$ – Мерьем отрезала 7 квадратов со стороной 4мм, остался прямоугольник 4 мм × 2мм;

$4 = 2 \times 2$ – Мерьем разрезала прямоугольник на 2 квадрата со стороной 2 мм.

Ответ: длина стороны последнего «отрезанного» квадрата равна 2 мм.

Задача №18, 19.

Какое самое маленькое и какое самое большое значение принимает дробь $\frac{3x+y}{x+y}$ ($\frac{7x+y}{x+y}$), если x и y – некоторые цифры, $x \neq 0$?

Решение.

Преобразуем данную дробь следующим образом: $\frac{3x+y}{x+y} = 1 + \frac{2x}{x+y} = 1 + \frac{2}{1+\frac{y}{x}}$.

($\frac{7x+y}{x+y} = 1 + \frac{6x}{x+y} = 1 + \frac{6}{1+\frac{y}{x}}$).

Отсюда ясно, что самое большое значение дроби получится, если знаменатель дроби будет наименьший. Это будет, если $y = 0$ и значение дроби будет равно 3 (7). Самое маленькое значение дроби 1,2 (1,6) будет, если y = 9, x = 1.

Ответ: 3; 1,2 или 7; 1,6.

Задача №20.

Шестнадцать чисел записаны в виде таблицы из 4 строк и 4 столбцов. Сложив числа 1-ой, 2-ой, 3-ей, 4-ой строк, 1-го, 2-го, 3-го, 4-го столбцов, учащийся получил суммы, указанные в таблице.

Таблица 1

				39
				27
				25
				47
39	37	33	28	

Правильны ли его вычисления?

Решение.

Найдём сумму всех строк: 39 + 27 + 25 + 47 = 138;

Найдём сумму всех столбцов: 39 + 37 + 33 + 28 = 137.

Т. к. суммы оказались неравными, то это означает, что вычисления у ученика неверны, ведь та и другая сумма – это сумма всех чисел таблицы.

Ответ: неверны.

Задача №21.

Существует ли квадрат, у которого длина стороны квадрата – целое число, а площадь квадрата равна 678678678678?

Решение.

Данное число 678678678678 делится на 3, т.к. сумма цифр 84 делится на 3. Чтобы это число было квадратом какого – либо числа, то оно должно делиться на 9. Но данное число не делится на 9, т.к. сумма цифр 84 на 9 не делится. Поэтому такого квадрата не существует.

Ответ: такого квадрата не существует.

Задача №22.

В классе 32 ученика написали по две контрольные работы. В результате учащиеся получили оценки: 3, 4, 5. Один ученик, узнав об этом, сказал: «По крайней мере, 6 человек получили одинаковые оценки по 2-м контрольным работам». Другой ученик возразил: «Учеников с одинаковыми оценками, наверно будет 7». Кто из учеников прав?

Решение.

Разобьём класс на группы в соответствии со всевозможными наборами оценок, которые могли получить учащиеся: (3, 4); (4, 3); (3, 5); (5,3); (5,4), (4,5). Всего 6 групп. Если в каждой из этих групп не больше 4 учащихся, то всего в классе не больше 24 учащихся, а если – не больше 5 учащихся, то всего в классе не больше 30 учащихся, что в том и другом случае противоречит условию задачи. Поэтому, по крайней мере, в одной из этих групп не меньше 6 учащихся. Например, 5,5,5,5,6,6 – количество учащихся в каждой из групп. Но, возможен и случай, о котором говорит второй ученик: 5,5,5,5,5,7. Потому оба ученика не правы.

Ответ: оба ученика не правы.

Задача №23, 24, 25.

Какой цифрой оканчивается произведение всех трёхзначных чисел, каждое из которых оканчивается а) на 3; б) на 7; в) на 8?

Решение.

а). От 100 до 200 существует 10 чисел (103, 113, 123 и т. д.), оканчивающихся на 3, от 200 до 300 существует 10 чисел (203, 213, 223, и т. д.), …, оканчивающихся на 3, от 900 до 999 также – 10 чисел (903,913, и т. д.), оканчивающихся на 3. Следовательно, всего таких чисел 9 раз по 10 троек. $9 \times 3^{10} = 3^2 \times 3^{10} = 3^{12}$. Проследим последнюю цифру степеней тройки.

Таблица 2

Степень	3^1	3^2	3^3	3^4	3^5	3^6	3^7	3^8	3^9	3^{10}	3^{11}	3^{12}
Последняя цифра степени	3	9	7	1	3	9	7	1	3	9	7	1

Ответ: 1.

б) всего чисел 9 раз по 10 семёрок. $9 \times 7^{10} = 3^2 \times 7^{10}$. Проследим последнюю цифру степеней семёрки.

Таблица 3

Степень	7^1	7^2	7^3	7^4	7^5	7^6	7^7	7^8	7^9	7^{10}
Последняя цифра степени	7	9	3	1	7	9	3	1	7	9

Значит, $9 \times 7^{10} = \ldots\ldots 1$.

Ответ: 1.

в) всего чисел 9 раз по 10 восьмёрок. $9 \times 8^{10} = 3^2 \times 8^{10} = 9 \times 2^{30}$. Проследим последнюю цифру степеней двойки.

Таблица 4

Степень	2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6	2^7	2^8	2^9	2^{10}	…	2^{20}	2^{30}
Последняя цифра степени	2	4	8	6	2	4	8	6	2	4		6	4

Итак, $9 \times 2^{30} = \ldots 6$.

Ответ: 6.

Обобщающий вывод. Цель, которую я ставила перед собой, – помочь учащимся учиться, а преподавателям и родителям – учить с радостью. Идея данной работы – показать учащимся, что математика – это не только длинные примеры на все действия, но и красивые текстовые задачи, которые требуют не только расчётов, но и размышлений. Методическая разработка содержит 25 задач, из различных разделов математики, доступных для решения учащимся 6 – 7 классов. Материал расположен по возрастанию уровня сложности задач, но содержит и некоторое количество простых задач. К каждой задаче приведён один из способов решения. Возможно, кто – либо найдёт другой, более простой способ решения. Я надеюсь, что данная методическая разработка будет полезна учащимся, их родителям и преподавателям математики. Благодарю учащихся, которые принимали участие в апробировании всех задач данной разработки.