Солохина Людмила Николаевна
учитель математики
МБОУ гимназия №5
г. Феодосия, Республика Крым

ПОДГОТОВКА ШКОЛЬНИКОВ К ОЛИМПИАДАМ ПО МАТЕМАТИКЕ. 6–9 КЛАССЫ. ЧАСТЬ 2

Аннотация*: в данной статье представлен комплекс задач, которые могут быть использованы учащимися и преподавателями для подготовки к олимпиадам различного уровня (школьного, муниципального и др.). Устойчивый интерес к математике формируется в 14–15 лет, но развивать этот интерес необходимо раньше, тогда учащиеся почувствуют, что размышления над трудными, нестандартными задачами могут доставить истинную радость.*

Ключевые слова*: олимпиада, математика, текстовые задачи, решение.*

Цель методической разработки:

– углубление и расширение знаний учащихся по математике;

– развитие математического кругозора, логического мышления;

– развитие устойчивого интереса учащихся к математике;

– разностороннее развитие личности.

Задачи методической разработки:

– развитие математических способностей и логического мышления у учащихся;

– развитие у учащихся умения работать со справочной и научно – популярной литературой;

– приобретение учащимися навыков в решении разнообразных задач из различных разделов курса математики, в том числе, требующих поиска путей и способов решения.

Задача №21.

Чебурашка и Крокодил Гена решили поиграть в игру: «Пусть дано 5 кучек камешков: 1 кучка – 6 камешков, 2 кучка – 7 камешков, 3 кучка – 5 камешков, 4 кучка – 4 камешка, 5 кучка – 2 камешка. Необходимо брать из одной произвольной кучки любое число камешков. Выигрывает тот, кто последним возьмёт камешек». Кто выиграет, если начинать играть будет Чебурашка?

Решение.

Решение задачи основано на знании и применении двоичной системы счисления. Вот некоторые числа представлены в двоичной системы счисления (таблица 1).

Таблица 1

Десятич.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Двоичная	1	10	11	100	101	110	111	1000	1001	1010	1011	1100	1101	1110

Далее Чебурашке для выигрыша необходимо соблюдать следующую стратегию:

1. Записываем количество камешков (в двоичной системе счисления) в столбик:

110

111

11

100

10

2. В каждом столбике вычисляем единиц и отмечаем те столбики, где их нечётное число.

3. Считаем количество столбиков, с нечётным количеством единиц.

4. Если таких столбиков: 1 – (а в данном случае один – крайний слева), то надо убрать одну единицу в этом столбике. Допустим, мы хотим убрать единицу у первого числа, тогда это означает, что мы должны из первой кучки убрать 4 камешка.

5. И если Чебурашка будет придерживаться такой стратегии до конца игры, то он выиграет.

6. Если столбиков с нечётным количеством единиц чётно (два, четыре и т. д.), то Крокодил Гена может перехватить инициативу в игре и, придерживаясь изложенной стратегии, выиграть.

Итак, в данной игре можно выиграть, если будете играть так, чтобы после каждого вашего хода в любом столбце таблицы стояло чётное число единиц.

Задача №22.

Оля и Коля, изучая законы Архимеда, решили в перерыве заняться математикой и поиграть в математическую игру: надо поочерёдно называть целые положительные числа. Первый игрок (Оля) называет число не большее 20, второй игрок (Коля) называет число, превышающее число, названное первым игроком (Олей), но не более, чем на 20, и т. д. Выигрывает тот, кто назовёт число 200. Как должен играть первый игрок (Оля), чтобы выиграть?

Решение.

Первый игрок (Оля) наверняка выиграет, если она назовёт число 179, т. к. второй игрок (Коля) затем назовёт число, не меньше 180 и не больше 199, поэтому первый игрок (Оля) затем назовёт число 200. Следовательно, чтобы первый игрок (Оля) выиграл необходимо называть такую последовательность чисел: 11, 32, 53, 74, 95, 116, 137, 158, 179, 200, при этом не обращать внимание на те числа, которые называет соперник (Коля).

Задача №23.

Дан квадрат размером 10×10. Оля и Коля по очереди закрашивают две соседние клетки. Проигрывает тот, кто не может сделать очередной ход. Кто выиграет, если первый ход делает Оля?

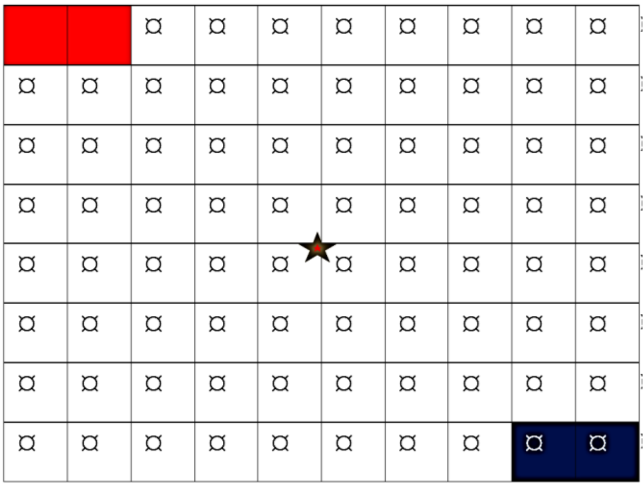

Рис. 1

Решение.

Выиграет Коля, если он будет придерживаться следующей стратегии: будет закрашивать две клеточки симметрично закрашенным Олей клеточкам относительно центра доски, как центра симметрии.

Задача №24.

Барсик может съесть молочную сосиску за 3 мин, а охотничью – за 4 мин. Мурка может сесть молочную сосиску за 7 мин, а охотничью – за 6 мин. За какое наименьшее время Барсик и Мурка могут съесть одну молочную и одну охотничью сосиски.

Решение.

Рассмотрим три возможных случая поедания сосисок Барсиком и Муркой, т. к. мы не знаем, в каком варианте получится наименьшее время.

1 вариант. Барсик начинает, есть молочную сосиску, а Мурка начинает, есть охотничью сосиску. За 3 минуты Барсик съедает молочную сосиску, а Мурка за это время съедает только половину охотничьей сосиски. Далее с обоих концов Мурка и Барсик доедают половина охотничьей сосиски. Пусть длина каждой сосиски равна – S, тогда длина половины сосиски – $\frac{S}{2}$. Барсик будет есть со скоростью – $\frac{S}{4}$, а Мурка со скоростью $\frac{S}{6}$. Общая скорость поедания этой половины сосиски равна $\frac{S}{4}+\frac{S}{6}$. Значит, время поедания половины охотничьей сосиски Барсиком и Муркой равно $\frac{\frac{S}{2}}{\frac{S}{4}+\frac{S}{6}} = \frac{1}{2} \times \frac{24}{10} = \frac{24}{20} = 1{,}2$ (мин). Общее время поедания двух сосисок равно 3 + 1,2 = 4,2 (мин).

2 вариант. Барсик и Мурка одновременно едят вначале молочную сосиску, а потом одновременно едят охотничью сосиску. Общая скорость поедания молочной сосиски равна $\frac{S}{3}+\frac{S}{7}$. Следовательно, время поедания молочной сосиски рано $\frac{S}{\frac{S}{3}+\frac{S}{7}} = \frac{21}{10} = 2{,}1$(мин). Аналогично, время поедания охотничьей сосиски Барсиком и Муркой равно $\frac{S}{\frac{S}{4}+\frac{S}{6}} = \frac{24}{10} = 2{,}4$ (мин). А общее время поедания двух сосисок равно 2,1 + 2,4 = 4,5 (мин).

3 вариант. Барсик начинает, есть охотничью сосиску, а Мурка начинает, есть молочную сосиску. За 4 минуты Барсик съедает охотничью сосиску, а Мурка за это время съедает $4 \times \frac{S}{7}$ молочной сосиски. Далее с обоих концов Мурка и Барсик доедают оставшуюся часть молочной сосиски $\frac{3}{7}S$. Общая скорость поедания этой части сосиски равна $\frac{S}{3}+\frac{S}{7}$. Значит, время поедания этой части молочной сосиски Барсиком и Муркой равно $\frac{\frac{3S}{7}}{\frac{S}{3}+\frac{S}{7}} = \frac{3}{7} \times \frac{21}{10} = \frac{9}{10} = 0{,}9$ (мин). Общее время поедания двух сосисок равно 4 + 0,9 = 4,9 (мин).

Итак, наименьшее время поедания двух сосисок Барсиком и Муркой будет тогда, когда каждое из животных будет, сначала есть ту сосиску, которую оно может съесть за наиболее короткое время, а потом доедать ту, которая осталась, одновременно друг с другом с различных концов.

Ответ: 4,2 мин.

Задача №25, 26.

Докажите, что данное число $2^{2015}+2$ делится на 10 (на 5).

Решение.

Таблица 2

2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6	2^7	2^8	2^9	2^{10}
2	4	8	16	2	4	8	6	2	4

Чтобы доказать, что данное число делится на 10, надо определить последнюю цифру данного числа. Цифра должна оказаться нулём. Последняя цифра степеней числа 2 повторяется, как видно из таблицы. 2015: 4 = 503 (ост.3), поэтому $2^{2015}+2 = (2^{503})^4 \times 2^3 + 2 = \ldots 6 \times 8 + 2 = \ldots 8 + 2 = \ldots 0$. Число $(2^{503})^4$ оканчивается, согласно таблице, на 6. 6 × 8 = 48; 8 + 2 =10. Данное число оканчивается на 0, а значит, делится на 10 (5).

Задача №27, 28.

№27. Докажите, что данное число 2^{2016}-1 делится на 5.

№28. Докажите, что данное число 2^{2016}-1 составное.

Решение.

№27. Аналогично, решению задач №2 и 3, определяем последнюю цифру числа 2^{2016}-1.

2^{2016}-1 = $(2^{504})^4 - 1 = \ldots 6 - 1 = \ldots 5$., значит, данное число кратно 5.

№28. 1 способ. А, если число имеет более двух делителей (кратно 5), то оно составное.

2 способ. 2^{2016}-1 = $(2^{504})^4 - 1$. Воспользуемся формулой сокращённого умножения и разложим это число на два множителя, каждый из которых является целым числом и не равен 1:

$((2^{504})^2 - 1) \times ((2^{504})^2 + 1)$. Значит, данное число 2^{2016}-1 – составное число.

3 способ. Воспользуемся формулой сокращённого умножения и разложим это число на два множителя, каждый из которых является целым числом и не равен 1: 2^{2016}-1 = $(2^{672})^3 - 1 = (2^{672} - 1) \times (2^{1344} + 2^{672} + 1)$. Значит, данное число 2^{2016}-1 – составное число.

Задача №29.

Докажите, что данное число $2^{2016}+8$ составное.

Решение.

Аналогично, решению задачи №5.

Задача №30.

Из цифр 2, 0, 1, 5 составить такое четырёхзначное число со всеми разными цифрами, которое при умножении на четырёхзначное число, которое записано теми же цифрами в обратном порядке, имело наименьшее произведение.

Решение.

Понятно, что первая цифра этого числа, должна быть наименьшей. Но, это не может быть 0, т. к. четырёхзначное число не может начинаться с 0. Значит, первой цифрой искомого числа будет 1, затем 0, затем 5 и 2. Если поменять местами цифры 5 и 2, то последней цифрой окажется 5 и пятёрка окажется первой цифрой обратного числа. Это даст большее произведение. Меньшее произведение получится, если числа 5 и 2 взять в таком порядке и тогда обратное число будет начинаться с 2. Итак, искомое число – 1052 и обратное – 2501.

Ответ; 1052.

Задача №31.

Татьяна сказала, что знает решение уравнения $xy^2 + yx^2 = 2015$ в целых числах. Права она или нет?

Решение.

Число 2015 – нечётное число. $xy^2 + yx^2$ – число чётное, т.к. $xy^2 + yx^2$ = xy (y + x):

1. Если x – чётное, y – чётное, значит, их произведение чётно, их сумма – чётна. Следовательно, xy (y + x) – чётно.

2. Если x – нечётное, y – чётно (или наоборот), то их произведение чётно, сумма – нечётная. Следовательно, xy (y + x) – чётно.

3. Если x – нечётно, y – нечётно, то их произведение – нечётно, их сумма – чётна. Следовательно, xy (y + x) – чётно.

Татьяна не могла знать решения данного уравнения в целых числах, т. к. решения нет.

Ответ: Не права.

Задача №32.

Члены охотничьего союза – мужчины, женщины и подростки соревновались в охоте на уток. Всего охотников было – 57. Каждый мужчина убил 35 уток, каждая женщина – 28 уток, а каждый подросток – 44 утки. Всего они убили 2015 уток. Сколько мужчин, женщин и подростков участвовали в соревнованиях по ловле рыбин?

Решение.

Пусть мужчин было x, женщин – y, а подростков z. Тогда:

$$\begin{cases} x + y + z = 57, \\ 35x + 28y + 44z = 2015; \end{cases}$$

Преобразуем второе уравнение:

$28(x + y + z) + 7x + 16z = 2015;$

$28 \times 57 + 7x + 16z = 2015;$

$1596 + 7x + 16z = 2015;$

$7x + 16z = 419;$

$x = \frac{419 - 16z}{7}.$

1. Если z = 3, то x = 53, а y = 1.

2. Если z = 10, то x = 37, y = 10.

3. Если z = 17, то x = 21, y = 19.

4. Если z = 24, то x = 5, а y = 29.

Ответ: возможны четыре варианта ответов (таблица 3).

Таблица 3

Варианты ответов	Мужчин	Женщин	Подростков
1	53	1	3
2	37	10	10
3	21	19	17
4	5	28	24

Задача №33.

Члены рыболовецкого союза – мужчины, женщины и подростки соревновались в ловле рыбы. Всего рыболовов было – 75. Каждый мужчина поймал 33 рыбины, каждая женщина – 35 рыбин, а каждый подросток – 18 рыбин. Всего они поймали 2016 рыбин. Сколько мужчин, женщин и подростков участвовали в соревнованиях по ловле рыбин?

Решение.

Пусть мужчин было x, женщин – y, а подростков z. Тогда:

$$\begin{cases} x + y + z = 75, \\ 33x + 35y + 18z = 2016; \end{cases}$$

Преобразуем второе уравнение:

18(x + y + z) + 15x + 17y = 2016;

18 × 75 + 15x + 17y = 2016;

1350 + 15x + 17y = 2016;

15x + 17y = 666;

$x = \frac{666-17y}{15}$.

5. Если y = 3, то x = 41, а z = 31.

6. Если y = 18, то x = 24, z = 33.

7. Если y = 33, то x = 7, z = 35.

Ответ: возможны три варианта ответов (таблица 4).

Таблица 4

Варианты ответов	Мужчин	Женщин	Подростков
1	41	3	31
2	24	18	33
3	7	33	35

Задача №34.

Найти все натуральные числа m и n, которые удовлетворяют равенству mn^2= 2016(n + 1).

Решение.

Разложим число 2016 на множители: 2016 = $2^5 \times 3^2 \times 7 = 2^4 \times 3^2 \times 7 = 12^2 \times 14$.

Числа n и n + 1 – взаимно простые, т. к. если предположить, что они не взаимно простые, следовательно, у них был бы общий делитель $d > 1$ и тогда $n = k_1 d$, $n + 1 = k_2 d$, тогда $1 = (n + 1) – n = d(k_2 - k_1)$. Из равенства следует, что d является делителем единицы, что противоречит предположению. Таким образом, для заданного равенства должны выполняться следующие условия:

1) m должно делится на (n + 1);

2) 2016 должно делиться на n^2.

Поскольку, 2016 = 144 × 14, то возможны два случая: n = 1 или n = 12. Рассмотрим оба случая.

1 случай.

n = 1, тогда m = 2016 × 2 = 4032.

2 случай.

n = 12, тогда m = 14 × 13 = 182.

Итак, уравнение имеет два решения.

Ответ: n = 1, m = 4032; n = 12, m = 182.

Задача №35.

Василий и Варвара решили выяснить, какое из чисел имеет больше делителей.

Первое число $1000^2 \times 1001^2 \times 1002^2$ ... 9000^2 раскладывает Василий,

второе число раскладывает Варвара – $(1000^2\text{-}1) \times (1001^2\text{-}1) \times \ldots \times (9000^2\text{-}1)$. Кто из ребят получит большее число?

Решение.

Василий имеет произведение делителей чисел от1000 до 9000, а Варвара имеет произведение делителей этих же чисел и ещё добавляются числа 999 и 9001:

$(1000^2\text{-}1) \times (1001^2\text{-}1) \times \ldots \times (9000^2\text{-}1) =$ (1000 – 1) × (1000 + 1) × (1001 – 1) × (1001 +1) … (9000 – 1) × (9000 + 1) = 999 × 1000 × 1001 × 1002 × … × 8999 × 9000 × 9001. Далее, рассуждаем следующим образом. Число 999 имеет делители, которые есть в других множителях, т. к. 999 = 3 × 3 × 3 × 37, а вот число 9001 является простым числом. Поэтому, у Варвары получится делителей больше на один.

Ответ: Варвара.

Задача №36.

Василий и Варвара решили выяснить, какое из чисел имеет больше делителей.

Первое число $1000^2 \times 1001^2 \times 1002^2$ … 2015^2 раскладывает Василий,

второе число раскладывает Варвара – $(1000^2\text{-}1) \times (1001^2\text{-}1) \times \ldots \times (2015^2\text{-}1)$. Кто из ребят получит большее число?

Решение.

Понятно, что решение задачи, аналогично предыдущей задаче. Но, ответ будет другим, т. к. числа 999 и 2016 являются составными и их делители уже встречаются в других множителях. Вывод: ребята получат одинаковое число множителей.

Ответ: никто не получит большее число множителей.

Задача №37.

Известно, что натуральное число n в десятичной записи имеет 2015 единиц и 2015 шестёрок, остальные цифры – нули. Может ли это число, являться квадратом какого либо натурального числа?

Решение.

Сумма цифр данного натурального числа равна $2015 \times 1 + 2015 \times 6 = 2015 \times 7 = 14105$. При делении на 3 получаем: 14104 : 3 = 4701(ост.2). А квадрат любого натурального числа при делении на 3 никогда не даёт остаток 2. Квадрат любого натурального числа при делении на 3 даёт остаток 1 либо 0. Например, $4 = 3 + 1$, $9 = 3 \times 3 + 0$, $16 = 3 \times 5 + 1$, и т. д.

Ответ: не может.

Задача №38.

Школьник написал на доске пример на умножение двух трёхзначных чисел, а потом одинаковые цифры заменил одинаковыми буквами:

$\overline{\text{ААВ}} \times \overline{\text{ССД}} = \overline{\text{МММNNN}}$. Докажите, что он ошибся.

Решение.

$\overline{MMMNNN} = M \cdot 10^5 + M \cdot 10^4 + M \cdot 10^3 + N \cdot 10^2 + N \cdot 10^1 + N = M \cdot (10^5 + 10^4 + 10^3) + N \cdot (10^2 + 10^1 + 10^0) = M \cdot 111000 + N \cdot 111 = 111 \cdot (M \cdot 1000 + N) \vdots 111.$

$\overline{AAB}$ не делится на $\overline{11}$ и ССД не делится на 11., т. к. трёхзначные числа, которые делятся на 111 записываются одинаковыми цифрами. Выражение слева не делится на 111, а выражение справа делится на 111. Такое невозможно, поэтому школьник ошибся.

Ответ: что и требовалось доказать.

P.S. Из этой задачи можно составить множество других, изменив в условии написание данных трёхзначных чисел. Например, $\overline{PKE}$, $\overline{BPH}$.

Задача №39.

Может ли число, в десятичной записи которого используются 10 единиц, 10 двоек и несколько нулей быть точным квадратом?

Решение.

Нет, не может, т. к. сумма цифр такого числа равна: $10 \cdot 1 + 10 \cdot 2 = 10 + 20 = 30$. Значит, число делится на 3. А, если это число точный квадрат, то это число должно делиться на 9 (произведение двух троек). Но это число не делится на 9, значит, не может являться точным квадратом некоторого числа.

Составив задачу №39, я подобрала ещё несколько чисел, и получились задачи №40 и №41, которые тоже имеют аналогичное решение. По понятным причинам не стал его приводить.

Задача №40.

Может ли число, в десятичной записи которого используются 10 четвёрок, 10 двоек и несколько нулей быть точным квадратом?

Решение.

Аналогично, задаче №39.

Задача №41.

Может ли число, в десятичной записи которого используются 10 восьмёрок, 40 единиц и несколько нулей быть точным квадратом?

Решение.

Аналогично, задаче №2.

Задача №42.

Можно ли все двух цифровые числа от 30 до 80 включительно написать в произвольном порядке одно за другим, и получить какое-либо простое число?

Решение.

В каком бы порядке не были бы записаны числа, сумма цифр, которые стоят на нечётных местах, равна 258: $10 \cdot 3 + 10 \cdot 4 + 10 \cdot 5 + 10 \cdot 6 + 10 \cdot 7 + 8 = 258$. Сумма цифр, которые стоят на чётных местах 225: $(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9) \cdot 5 = 225$. Разность между суммами равна $258 - 225 = 33$. $33 \vdots 11$. Поэтому всегда получим число, которое кратно 11, а значит, искомое число не является простым. Понятно, что для решения задачи использовался признак делимости чисел на 11, а догадаться, что именно его надо использовать для решения задачи непросто.

Ответ: нет, нельзя.

Подобных задач можно составить множество, но придётся хорошо потрудиться. Мне удалось составить ещё одну задачу. Далее задача №43 аналогичная.

Задача №43.

Можно ли все двух цифровые числа от 30 до 91 включительно написать в произвольном порядке одно за другим, и получить какое – либо простое число?

Решение.

Аналогично, задаче №5.

Задача №44.

Сложили сумму, разность, произведение и частное от деления целых чисел и получили 882. Найдите эти числа.

Решение.

Пусть это числа – x и y. Тогда

$$(x + y) + (x - y) + x \cdot y + \frac{x}{y} = 882;$$

$$2x + xy + \frac{x}{y} = 882;$$

$$\frac{2xy + xy^2 + x}{y} = 882;$$

$$\frac{x}{y}(y^2 + 2y + 1) = 882;$$

$$\frac{x}{y}(y + 1)^2 = 882\ ,$$

Так как 882 = 1 × 2 × 3^2 × 7^2, то $(y+1)^2$ может быть равно $1^2, 3^2, 7^2, 21^2$. Перебирая, все случаи, получаем следующие пары чисел. ($y \neq 0$)

1. y + 1 = –1, y = –2, а, значит, x = 1764. Отсюда, пара чисел: (1764; –2).

2. y + 1 = 3, y = 2, x = 196. Пара чисел: (196; 2).

3. y + 1 = –3, y = –4, x = 392. Пара чисел: (392; –4).

4. y + 1 = 7, y = 6, x = 108. Пара чисел: (108; 6).

5. y + 1 = –7, y = –8, x = –144. Пара чисел: (–144; –8).

6. y + 1 = 21, y = 20, x = 40. Пара чисел: (40; 20).

7. y + 1 = –22, y = –22, x = – 44. Пара чисел: (–44; –22).

Ответ: (1764; –2), (196; 2), (392; –4), (108; 6), (–144; –8), (40; 20), (–44; –22).

Список литературы

1. Вороной А.М. Готовимся к олимпиадам по математике. – Харьков: Основа, 2008.

2. Галицкий М.Л., Гольдман А.М., Звавич Л.И. Сборник задач по алгебре. 8–9. – М.: Просвещение, 2001.

3. Зубелевич Г.И. Сборник задач московских математических олимпиад», Просвещение, 1967.

4. Карп А.П. Задачи по алгебре. 8–9. – СПб.: Мир и семья-95, 1997.

5. Макарычев Ю.Н., Миндюк Н.Г. Дополнительные главы к школьному учебнику. – М.: Просвещение, 2000.

6. Осинская В.Н. Допрофильная подготовка семиклассников по математике. – Луганск: Учебная книга, 2007.

7. Рублёв Б.В. Математические олимпиадные соревнования школьников. – 2010.