

Марченко Сергей Игоревич

студент

Сербина Людмила Ивановна

д-р физ.-мат. наук, профессор,

Почетный работник ВО

ГБОУ ВО «Ставропольский государственный

педагогический институт»

г. Ставрополь, Ставропольский край

ЗАДАЧА ОБ ОЦЕНКЕ ТОЧНОСТИ МАЯТНИКОВЫХ ЧАСОВ

Аннотация: в статье рассматриваются вопросы применения обыкновенных дифференциальных уравнений к исследованию точности маятниковых часов.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения, решение дифференциальных уравнений, качественный анализ.

Дифференциальные уравнения являются одной из основных структур, лежащих в основе математических моделей, которые используются при изучении различных проблем естествознания и техники.

Задачи практического содержания решают, как правило, с учетом естественных предположений, которые отражают основные физические закономерности, происходящих реальных процессов. Рассмотрим один из примеров использования обыкновенных дифференциальных уравнений при изучении процесса колебаний, которые являются одним из наиболее распространенных в природе и технике. Для изучения колебаний, наглядно демонстрирующих их свойства, применяют модель маятника. Маятник можно интерпретировать как некоторую систему, подвешенную в поле тяжести и совершающую механические колебания. Идеализацией этого случая является математический маятник, представляющий механическую систему, состоящую из материальной точки, подвешенной на невесомой нерастяжимой нити или на невесомом стержне в поле тяжести [1, с. 350].

Рассмотрим идеализированную модель маятниковых часов, состоящих из стержня длиной l , гири массой m на его конце. Масса стержня предполагается такой, что ее можно не учитывать по сравнению с массой гири. Если гирю отклонить на угол α , а затем отпустить, то в соответствии с законом сохранения энергии имеем математическое соотношение:

$$\frac{mV^2}{2} = mg(l \cos \theta - l \cos \alpha), \quad (1)$$

где $V = V(t)$ скорость движения гири и $\theta = \theta(t)$ – угол отклонения гири в момент времени t , g – ускорение силы тяжести.

В соответствии с уравнением (1) колебания гири совершаются под действием силы тяжести, силы упругости и силы трения. Во время колебаний маятника происходит постоянные превращения энергии из одного вида в другой. Кинетическая энергия маятника превращается в потенциальную энергию и обратно.

Рассматривая только малые отклонения, всегда можно считать, что длина дуги S , на которую гиря отклоняется от положения равновесия на угол θ , определяется равенством $S = l\theta$.

Тогда в этом случае имеем, что:

$$V = \frac{dS}{dt} = l \frac{d\theta}{dt}. \quad (2)$$

Уравнение (1), в силу соотношения (2), принимает вид обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка:

$$\frac{l}{2} \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = g(\cos \theta - \cos \alpha). \quad (1)$$

Разделяя в уравнении (3) переменные, получим равенство:

$$dt = - \sqrt{\frac{l}{2g}} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos \alpha}}. \quad (4)$$

Интегрируя дифференциальное уравнение (4) и учитывая, что угол θ убывает с возрастанием времени t , получим выражение:

$$\frac{T}{4} = \sqrt{\frac{l}{2g}} \int_{\alpha}^0 \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos \alpha}},$$

где T – период колебания маятника [2, с. 263]. Откуда период колебания маятниковых часов определяется формулой:

$$T = 4 \sqrt{\frac{l}{2g}} \int_{\alpha}^0 \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos \alpha}} . \quad (5)$$

Анализ формулы (5) показывает, что период колебания гиревых часов зависит от первоначального угла отклонения α и практически с течением времени гири каждый раз отклоняется в крайнее положение на угол θ отличный от первоначального угла α . Это является основной причиной того, что маятниковые часы не являются точными [3].

Список литературы

1. Бухольц Н.Н. Основной курс теоритической механики / Н.Н. Бухгольц. – Наука, 1969. – 468 с.
2. Голубева О.В. Теоритическая механика / О.В. Голубева. – Высшая школа, 1968. – 488 с.
3. Добровольская Т.Н. Математический маятник: период, ускорения и формулы / Т.Н. Добровольская [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://fb.ru/article/148323/matematicheskiy-mayatnik-period-uskorenie-i-formulyi>.