Нижник Петр Петрович
канд. техн. наук, доцент
Германов Анатолий Александрович
канд. техн. наук, доцент
Васильев Алексей Сергеевич
канд. техн. наук. доцент
ФГБОУ ВПО «Петрозаводский государственный университет»
г. Петрозаводск, Республика Карелия

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ СТРУКТУР ПРОСТРАНСТВА, АССОЦИИРОВАННЫХ С РАЗРУШЕНИЕМ ГОРНЫХ ПОРОД

Аннотация*: в данной статье рассматривается проблема сложности и многообразия процессов, протекающих в континуумах горных пород, многостадийность и иерархичность структурных дефектов. Изучаются тектонические, термоупругие и остаточные напряжения, изменяющиеся во времени и пространстве и требующие тонких и совершенных расчетов.*

Ключевые слова*: горные породы, математический анализ, разрушение.*

Математический анализ пространств в работах Берке, Ванга, Сиодзавы показал [1–2], что внутренняя метрика идеальных континуумов не совпадает с метрикой реального материала. Реальное физическое тело было предложено рассматривать в римановой метрике, внедренной в евклидов континуум. Что было использовано, например, для описания термодинамических свойств горных пород. Отмечено, что для описания состояния сплошной среды одного параметра недостаточно, для этого необходимо вводить параметры тензорной природы.

Структура реальных тел накладывает определенные ограничения на традиционные методы испытания мехсвойств. Анализировать дефекты в горной среде следует на иерархическом уровне – от значительных макротрещин до дефектов кристаллической решетки – дислокаций и дисклинаций.

Механическое поведение материалов очень чувствительно ко многим факторам внутренней и внешней среды, например, на механические и термические воздействия, на волновые воздействия, термические удары, фильтрацию и пр. Существуют горные породы, у которых изменения происходят постепенно, размыто, что требует для их анализа тонких методов и применения теоретических множеств.

Ряд эффектов в рамках классических представлений не получают исчерпывающего объяснения. Это, например, непредсказуемый разлет горных пород при взрывах, образование большого количества негабаритов, которыми завалены обширные площади полезных земель, и др. К таким эффектам относятся также макроскопические и микроскопические дефекты. Макроскопические дефекты – это зародышевые трещины поврежденности. Микроскопические трещины – дислокации, дисклинации, точечные дефекты кристаллической структуры. Скрытые дефекты сплошности – невидимая трещиноватость горной породы, от которой, например, сильно зависят фильтрационные свойства пород.

Таким образом, в число аргументов функции состояния материала горной среды должен входить тензор трещиноватости, В лагранжевой системе это тензор Грина-Лагранжа,, в эйлеровой – тензор Альманси-Эйлера [3].

Как показывает практический опыт моделью сплошной среды является трехмерное ортонормированное евклидово пространство. Элементы сплошной среды индивидуализированы. Каждому элементу ставится в соответствие радиус-вектор $\vec{r}$, которому соответствует тройка чисел- координат в лагранжевой или эйлеровой системах отсчета, Деформация горной среды характеризуется изменением взаимного расположения точек среды. Фундаментально в классической механике сплошной среды является гипотеза сплошности – неравенство якобиана нулю: $\frac{\partial \chi^{\prime}}{\partial \xi \iota} \neq o$, где ς – координата начального состояния; $\chi^{\prime} = \chi^{\prime}(\xi\tau)$ координата текущего состояния.

Однако этих условий оказывается недостаточно для описания геометрической и термодинамической структуры пространства, ассоциированного с деформацией и разрушением. Метрика пространства становится неевклидовой. Таким образом, для горной среды мы приходим к необходимости введения пространств различных геометрических структур.

Одним из таких пространств является аффинное пространство. Однако в аффинном пространстве отсутствует существенное с точки зрения механики сплошной среды понятие – расстояние между элементами. Поэтому, вводятся евклидовы пространства, которые могут быть вещественными и комплексными. Вещественные евклидовы, в свою очередь, распадаются на собственно евклидовы, где $\left|\vec{A}\vec{B}\right| = \sqrt{x^2}$ и псевдоевклидовы, где длина вектора равна нулю, или даже отрицательна. Введение такого пространства позволило ввести метрический тензор g_{ig}. Кроме того, следует учитывать расслоение горных пород $\vec{n} \cdot rot\vec{n} = 0$,где $\vec{n}$ – векторное поле единичных нормалей к поверхностям семейства расслоений. Связность пространства определяется уравнением геодезической линии $\frac{d^2x^k}{d\tau} = -\Gamma^k_{ij}\frac{dx_i}{\vec{\tau}}\frac{dx}{\vec{\tau}}$; где Γ^k_{ij} – коэффициенты связности риманова пространства, τ – натуральный параметр к кривой при естественной параметризации.

Одна из проблем горного производства – установление зависимости макроскопических свойств материала от его микроскопических характеристик. Важным является то, что локальные величины и объекты оказывают влияние на нелокальный объем материала. Например, тектонические напряжения, термоупругие напряжения сильно влияют на мехсвойства материала в массиве пород. Такие напряжения, а также остаточные напряжения превращают однородное тело в.анизотропное и неоднородное даже без приложения внешней нагрузки Уравнения состояния должны одновременно включать как материальные свойства недеформируемого континиума, так и внутреннюю неоднородность и анизотропию поля внутренних напряжений – тектонических, термоупругих и остаточых: напряжений. При этом условия совместности деформаций будет выполняться не всегда, поэтому тензор кривизны в пространстве будет отличен от нуля. Вместо уравнения совместности следует использовать равенство дисторсии нулю $\vec{\nabla} \times \vec{R} = 0$.

Когда континуум испытывает произвольную деформацию, как в случае воздействия на нее взрывных воздействии, возникает множество евклидовых пространств и тензор несовместности определяется соотношением $-\nabla \times e^{P} \times \nabla$, где eP – тензор деформации. Верно и обратное, несовместимость деформации является источником упругой деформации. Несовместность деформации значительно усложняет математические модели механики сплошных сред при описании поведения материалов.

Независимость формирования дефектов в реальном материале требует независимого определения тензоров кривизны, и тензоров кручения Римана-Кристоффеля. А это возможно, по-видимому, в пространствах нерімановых. Одним из таких пространств есть пространство Финслера [4].

Метрические свойства среды – метрический тензор, – влияет на фрактальность процесса разрушения – распространение трещин. Фрактальность процесса связывается с локальными геометрическими свойствами пространства.

Финслерова геометрия в теории разрушения позволяет без дополнительных гипотез о свойствах континуума описать дефектную структуру среды и историю деформирования [4]. Локальное и глобальное изменение направления распространения трещины в реальных материалах могут быть вызваны неоднородностью мехсвойств материала, наличием структурных границ и дефектных структур материала. Таким образом, при рассмотрении процессов разрушения дефектная структура становится фактором, изначально определяющим геометрическую структуру пространства, т.е. геометрия пространства становится расчетным фактором.

При движении трещины разрывными являются перемещения, плотность материала, скорости частиц горной среды, внутреннее напряжение по обе стороны поверхности трещин. Уравнение распространения трещины по фронту имеет вид: $\sigma_t(x_i\xi,t)g_{ij}(x^k\xi^k)\xi^i g^i je_i + g_{ij}(x^k\xi^k)\xi^k p_{kr}{}^j(x,\xi)x^k\xi^\iota = 0$

Это уравнение используется при проектировании материалов с заданными зонами разрушатся при эксплуатации [5].

Распространение трещин в горной среде имеет ряд особенностей – фрактальный характер процесса разрушения [6] и стохастизация траектории [7]. Траектория возникающей при этом трещины может быть криволинейной, распространение трещины может быть хаотичным. На устойчивость распространения трещины, особенно вблизи точек бифуркации, существенно влияет микроструктура. В некоторых режимах распространения трещин возникает процесс самоподдерживающегося разрушения, когда распространение трещины приобретает лавинообразный, самоподдерживающий характер. Для такого взрывного распространения трещины достаточен уровень напряжений значительно меньший критического. При этом существенен характер остаточных напряжений [7]. Неустойчивость может быть вызвана неоднородным полем дислокаций, неоднородными механическими свойствами континуума, случайными фуктуациями приложенных напряжений [7] В работе [5] обнаружены области, где распространение трещин «запрещено».

В последнее время теории разрушения активно применяется теория фрактальных структур [5, 6]. Априори принимается, что плотность микротрещин P имеет характер фрактала с гиперболическим распределением $P(a_c)=\frac{N_2(a\rangle a_c)}{V}=\lambda a_c^{-d}$, где a_c – критический размер трещины; λ – постоянная, D – фрактальная размерность, 0<D<3; N_2 – число микротрещин, длина которых больше критической величины [6].

В соответствии с теорией фракталов для разрушения достаточно одной трещины. Поэтому всего одна магистральная трещина определяет предел прочности материала. Тогда вероятность разрушения $F=1-\exp(-pV)$, где F – вероятность найти хотя бы одну критическую трещину; V – объем образца; P – количество критических трещин в единице объема. Переход от дисперсного разрушения к магистральной трещине [7] появление точек бифуркация соответствует явлениям типа «катастроф». Поэтому классические объекты разрушения могут рассматриваться с точки зрения «теории катастроф».

Список литературы

1. Берке У. Пространство, время, геометрия, Космология / У. Берке. – М.: Мир, 1985.

2. Снодзива К. Микромеханика /К. Снодзива [и др.]. – М.: Металлургия, 1987. – 280 с.

3. Схоутен Я. Тензорный анализ / Я. Схоутен. – М.: Наука, 1965. – 456 с.

4. Рунд Х. Дифференциальная геометрия фиколеровых пространств / Х. Рунд. – М.: Наука, 1987. – 504 с.

5. Баланкин А. Фрактальная механика. ДАН России / А. Баланкин. – 1992. – Т. 322. – №5. – С. 869–874.

6. Иванова В.С. Синергетика и Фракталы / В.С. Иванова [и др.]. – М.: Наука, 1994.

7. Чигарев А.В. Модель стохастизации траектории щины /А.В. Чигарев [и др.]. – М.: Физматлит, 2001. – С. 371.