

Шеховцов Геннадий Анатольевич

д-р техн. наук, профессор

Шеховцова Раиса Павловна

доцент

Раскаткина Ольга Валерьевна

ассистент

ФГБОУ ВПО «Нижегородский государственный

архитектурно-строительный университет»

г. Нижний Новгород, Нижегородская область

РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ КООРДИНАТНОГО СПОСОБА ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЦЕНТРА И РАДИУСА СЕЧЕНИЙ СООРУЖЕНИЙ КРУГЛОЙ ФОРМЫ

***Аннотация:** в статье описана методика моделирования способа определения оптимального радиуса и координат центра окружности, наименее отклоняющейся от заданных точек сечения сооружения круглой формы. Авторами показано решение поставленной задачи на примере определения положения и радиуса сечений дымовой трубы.*

***Ключевые слова:** радиус, центр окружности, координаты, сочетание.*

В работах [1; 2] изложены теоретические основы координатного способа определения центра и радиуса сечений сооружений круглой формы, таких как дымовые и вентиляционные трубы, градирни, ректификационные колонны, грануляционные башни, копры над стволами шахт, водонапорные башни, радиотелевизионные антенные опоры, силосные башни, колонны зданий, различные резервуары, купола исторических памятников, нефтехранилища, элеваторы и др. Сущность способа заключается в том, что с одной точки стояния электронного тахеометра безотражательного типа определяют прямоугольные координаты точек наблюдаемого сечения. По координатам этих точек можно вычислить координаты X и Y центра и радиус R наблюдаемого сечения по приведенным в работах [1; 2] формулам.

По координатам X_i и Y_i центров наблюдаемых сечений можно определять частные крены по осям координат и общий крен сооружения, а также их направления (румбы r_i). Крен по осям абсцисс δX и ординат δY находят как разность координат соответствующего сечения и координат X_H и Y_H нижнего сечения трубы: $\delta X_i = X_i - X_H$, $\delta Y_i = Y_i - Y_H$. Общая величина крена в каждом сечении определяется по теореме Пифагора $K = \sqrt{\delta X^2 + \delta Y^2}$, а направление $r = \arctg \delta Y / \delta X$, причём знаки δX и δY укажут на название румба: северо-восток, юго-восток, северо-запад или юго-запад.

Если число точек наблюдаемого сечения больше трёх, то возникает задача подбора окружности оптимального радиуса R_{opt} с координатами её центра X_{opt} и Y_{opt} , наименее отклоняющейся от заданных точек. Для этого в системе MatLab [3] разработана программа поиска такой окружности, основанная на минимизации суммы квадратов расстояний имеющихся точек от этой окружности с помощью специальной функции *fminunc*.

Для геометрической интерпретации получаемых результатов используется *function* $[x, y] = \text{circle}(X, Y, R, N, \text{draw})$ для вычисления координат точек, лежащих на окружности и рисования замкнутого вписанного многоугольника. Здесь X, Y, R координаты центра отдельной окружности, а N – число точек на этой окружности, которое в рассматриваемой программе было принято равным 50 для трансформации многоугольника в окружность.

Численные эксперименты показали, что хорошим приближением к оптимальным значениям дает метод «средних по тройкам». Для этого перебирают все n сочетаний по 3 из имеющихся точек. Так для трёх точек имеем одно сочетание, для четырёх – четыре, для пяти – десять и т. д. Для каждого сочетания вычисляют координаты X и Y центра и радиуса R окружности, проходящей через эти три точки.

Точность вычисленных параметров зависит от точности определения координат левой Л (x_L, y_L), средней С (x_C, y_C) и правой П (x_P, y_P) точек каждого сочетания. В работе [4] показано, что точность X, Y и R зависит от соотношения $(y_C - y_L) / (x_L - x_C)$ и, следует добавить, от расстояния $ЛП = (y_P - y_L)$ (рис. 1).

Наиболее оптимальным является соотношение, близкое к единице и расстояние, близкое к $2R$. За окончательные значения координат центра наблюдаемого сечения и его радиус принимают средние значения X_{mean} , Y_{mean} , R_{mean} , вычисляемые по формулам:

$$X_{mean} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}, \quad Y_{mean} = \frac{\sum_{i=1}^n Y_i}{n}, \quad R_{mean} = \frac{\sum_{i=1}^n R_i}{n}. \quad (1)$$

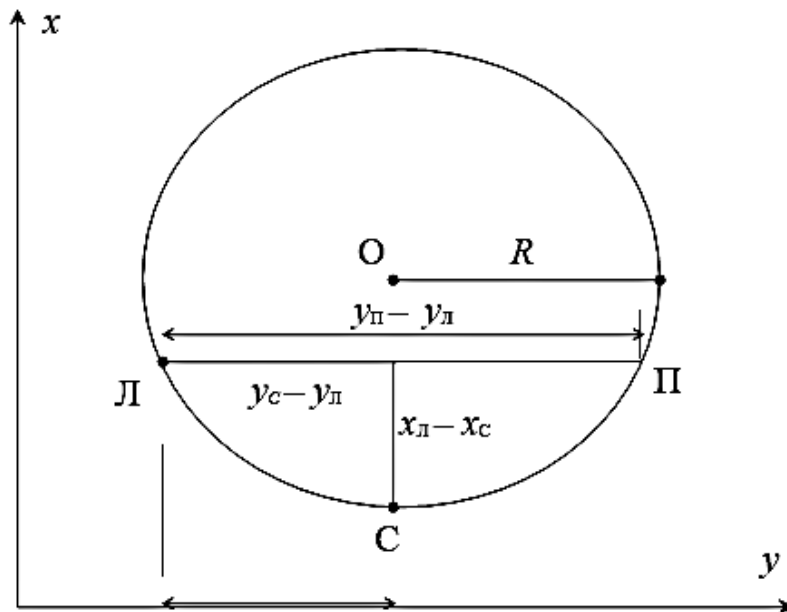


Рис. 1. Частный случай одностороннего координатного способа

Поставленная задача может иметь одно очевидное решение даже при количестве точек больше 3 при условии, что эти точки лежат на одной окружности и их координаты определены безошибочно. Такой вывод был подтверждён результатами моделирования, которое заключалось в измерении в ArchiCAD-11 в условной системе и условных единицах координат x и y пяти точек 1 (11113, 12102), 2 (6340, 6071), 3 (–90, 4181), 4 (–6712, 6197), 5 (–11267, 12027).

По разработанной в системе MatLab программе, были подсчитаны координаты центров модели и их радиусы (графы 3, 4, 5 таблицы 1) для 10 различных сочетаний из 5 этих точек по 3 и построены окружности (рис. 2).

Результаты моделирования координатного способа

Сечение	Сочетание	Координаты, радиус и отклонения от средних					
		X	Y	R	ΔX	ΔY	ΔR
1	2	3	4	5	6	7	8
1-2-3-4-5 (модель, размеры в условных единицах)	(1)1-2-3	-90,1	16064,0	11883,0	-0,1	-0,6	-0,5
	(2)1-2-4	-90,1	16064,1	11883,1	-0,1	-0,5	-0,4
	(3)1-2-5	-90,4	16064,3	11883,4	0,2	-0,3	-0,1
	(4)1-3-4	-90,2	16064,2	11883,2	0,0	-0,4	-0,3
	(5)1-3-5	-90,4	16064,5	11883,5	0,2	-0,1	0,0
	(6)1-4-5	-90,4	16064,9	11883,6	0,2	0,3	0,1
	(7)2-3-4	-90,1	16064,3	11883,3	-0,1	-0,3	-0,2
	(8)2-3-5	-90,3	16064,7	11883,7	0,1	0,1	0,2
	(9)2-4-5	-90,1	16065,1	11884,0	-0,1	0,5	0,5
	(10)3-4-5	-89,8	16065,4	11884,4	-0,4	0,8	0,9
$X_{opt}, Y_{opt}, R_{opt}$		-90,2	16064,6	11883,5			
Средние ($mean$)		-90,2	16064,6	11883,5			

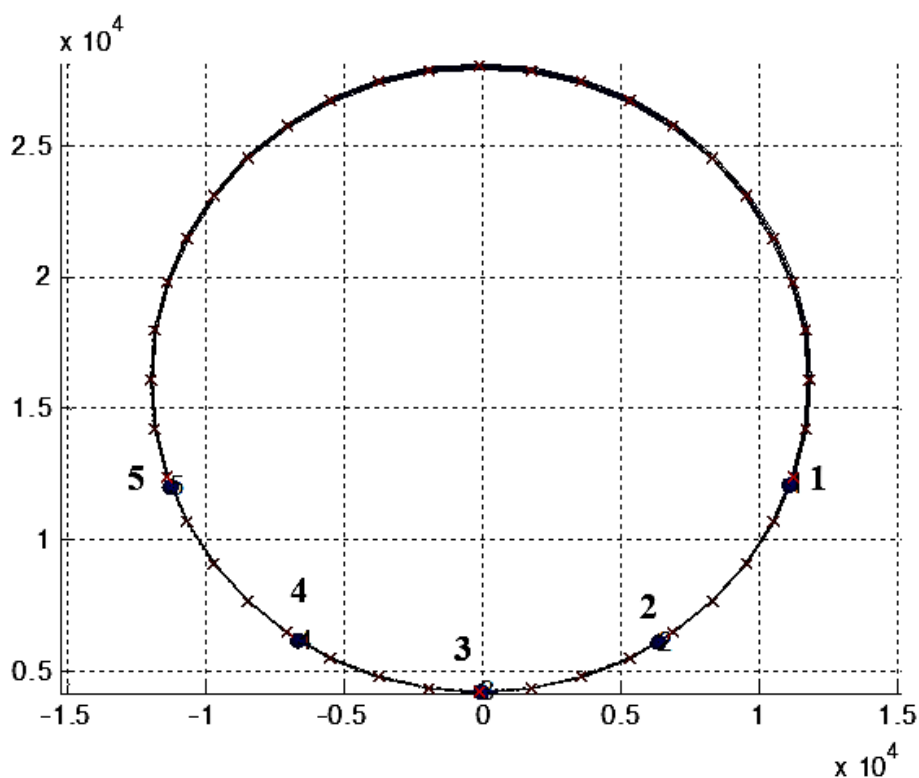


Рис. 2. Схема моделирования по пяти точкам на одной окружности

Результаты подсчёта отклонений $\Delta X = X_i - X_{opt}$, $\Delta Y = Y_i - Y_{opt}$ и $\Delta R = R_i - R_{opt}$ показали, что для всех 10 сочетаний получены практически одни и те же

значения координат центров и радиусов сечений, а все построенные окружности слились в одну, в том числе и окружности радиуса R_{opt} и R_{mean} (рис. 2).

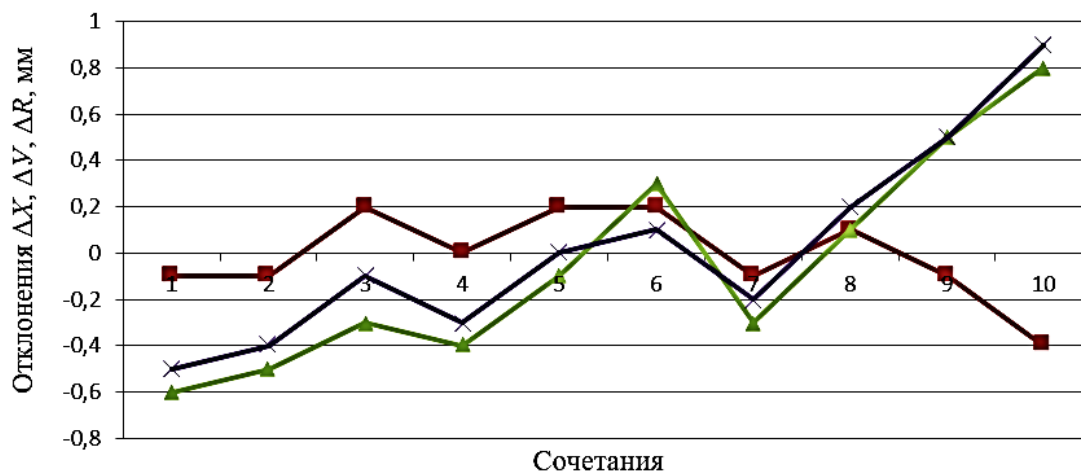


Рис. 3. Графики зависимости ΔX , ΔU , ΔR от сочетания точек для сечения модели 1–2–3–4–5

Однако даже при таких незначительных отклонениях ΔX , ΔU и ΔR (графы 6, 7, 8 таблицы 1) можно заметить, что наибольшие отклонения имеют место для сочетаний (1) и (10), что также наглядно иллюстрируется графиками на рис. 3.

Предложенная методика была опробована на дымовой трубе высотой 40 м и радиусами: поверху 1,3 м, понизу 2,0 м (рис. 4).



Рис. 4. Схема расположения наблюдаемых точек на дымовой трубе

Для этого электронным тахеометром *SET 530R/R3* были измерены в произвольной системе координаты 10 точек, расположенных на двух её сечениях по 5 точек на каждом сечении (рис. 4). Результаты измерений представлены в табл. 2 (графы 3 и 4). Как и в предыдущем случае, для этих сечений будем иметь по 10 различных сочетаний (графа 2) из пяти по три. Для каждого сочетания были найдены соотношения $(y_c - y_l) / (x_l - x_c)$ и расстояния $(y_p - y_l)$ (графы 7 и 8).

Таблица 2

Результаты координатных измерений трубы

Сечение	Сочетание	Координаты, м		$(y_c - y_l)$	$(x_l - x_c)$	5/6	$(y_p - y_l)$
		y	x				
1	2	3	4	5	6	7	8
1–2–3–4–5 (труба)	(1)1–2–3	98,011 99,200 100,000	127,466 125,891 125,716	1,189	1,575	0,755	1,989
	(2)1–2–4	98,011 99,200 101,127	127,466 125,891 126,060	1,189	1,575	0,755	3,116
	(3)1–2–5	98,011 99,200 101,987	127,466 125,891 127,408	1,189	1,575	0,755	3,976
	(4)1–3–4	98,011 100,000 101,127	127,466 125,716 126,060	1,989	1,750	1,137	3,116
	(5)1–3–5	98,011 100,000 101,987	127,466 125,716 127,408	1,989	1,750	1,137	3,976
	(6)1–4–5	98,011 101,127 101,987	127,466 126,060 127,408	3,116	1,406	2,216	3,976
	(7)2–3–4	99,200 100,000 101,127	125,891 125,716 126,060	0,800	0,175	4,571	1,927
	(8)2–3–5	99,200 100,000 101,987	125,891 125,716 127,408	0,800	0,175	4,571	2,787
	(9)2–4–5	99,200 101,127 101,987	125,891 126,060 127,408	1,927	–0,169	–11,402	2,787
	(10)3–4–5	100,000 101,127 101,987	125,716 126,060 127,408	1,127	–0,344	–3,276	1,987

6-7-8-9-10 (труба)	(1) 6–7-8	98,257 99,197 100,004	127,592 126,184 125,978	0,940	1,408	0,668	1,747
	(2) 6–7-9	98,257 99,197 101,129	127,592 126,184 126,389	0,940	1,408	0,668	2,872
	(3) 6–7-10	98,257 99,197 101,763	127,592 126,184 127,549	0,940	1,408	0,668	3,506
	(4) 6–8-9	98,257 100,004 101,129	127,592 125,978 126,389	1,747	1,614	1,082	2,872
	(5) 6–8-10	98,257 100,004 101,763	127,592 125,978 127,549	1,747	1,614	1,082	3,506
	(6) 6–9-10	98,257 101,129 101,763	127,592 126,389 127,549	2,872	1,203	2,387	3,506
	(7) 7–8-9	99,197 100,004 101,129	126,184 125,978 126,389	0,807	0,206	3,917	1,932
	(8) 7–8-10	99,197 100,004 101,763	126,184 125,978 127,549	0,807	0,206	3,917	2,566
	(9) 7–9-10	99,197 101,129 101,763	126,184 126,389 127,549	1,932	–0,205	–9,424	2,566
	(10) 8–9-10	100,004 101,129 101,763	125,978 126,389 127,549	1,125	–0,411	–2,737	1,759

На основании данных табл. 2 можно отметить, что наиболее оптимальными следует считать сочетания (2), (3), (4) и (5) для обоих сечений.

Рассмотрим, как координаты центра сечения и его радиус, полученные из каждого сочетания, согласуются со средними их значениями. Для этого в программу MatLab были введены измеренные координаты точек сечений 1–2–3–4–5 и 6–7–8–9–10 трубы.

Таблица 3

Результаты моделирования по пяти измеренным точкам

Сечение	Сочетание	Координаты, радиус и отклонения от средних, м					
		Y	X	R	ΔY	ΔX	ΔR
1	2	3	4	5	6	7	8
1–2–3–4–5 (труба)	(1)1–2–3	100,025	127,751	2,035	0,016	0,027	0,028
	(2)1–2–4	100,008	127,738	2,016	–0,001	0,014	0,009

	(3)1–2–5	100,003	127,734	2,010	–0,006	0,010	0,003
	(4)1–3–4	100,003	127,725	2,009	–0,006	0,001	0,002
	(5)1–3–5	100,003	127,725	2,009	–0,006	0,001	0,002
	(6)1–4–5	100,003	127,725	2,009	–0,006	0,001	0,002
	(7)2–3–4	100,013	127,691	1,976	0,004	–0,033	–0,031
	(8)2–3–5	100,017	127,709	1,993	0,008	–0,015	–0,014
	(9)2–4–5	100,010	127,721	2,001	0,001	–0,003	–0,006
	(10)3–4–5	100,003	127,726	2,010	–0,006	0,002	0,003
Средние (<i>mean</i>)		100,009	127,724	2,007			
6–7–8–9–10 (труба)	(1)6–7–8	100,028	127,757	1,779	0,018	0,015	0,019
	(2)6–7–9	100,008	127,744	1,758	–0,002	0,002	–0,002
	(3)6–7–10	100,012	127,746	1,762	0,002	0,004	0,002
	(4)6–8–9	100,002	127,728	1,750	–0,008	–0,014	–0,010
	(5)6–8–10	100,012	127,739	1,761	0,002	–0,003	0,001
	(6)6–9–10	100,012	127,753	1,763	0,002	0,011	0,003
	(7)7–8–9	100,013	127,698	1,720	0,003	–0,044	–0,040
	(8)7–8–10	100,021	127,729	1,751	0,011	–0,013	–0,009
	(9)7–9–10	100,007	127,756	1,768	–0,003	0,014	0,008
	(10)8–9–10	99,989	127,766	1,788	–0,021	0,024	0,028
Средние (<i>mean</i>)		100,010	127,742	1,760			

Компьютер выдаёт на экран монитора десять сочетаний из пяти точек по три (см. табл. 3, графа 2) и для каждого сочетания получаем значения координат X и Y центра и радиуса R (графы 3, 4, 5), а также X_{mean} , Y_{mean} , R_{mean} и X_{opt} , Y_{opt} , R_{opt} , которые оказались практически одинаковыми со средними значениями.

Результаты подсчёта отклонений $\Delta X = X_i - X_{mean}$, $\Delta Y = Y_i - Y_{mean}$ и $\Delta R = R_i - R_{mean}$ (графы 6, 7, 8) показали, что отклонения ΔX находятся в пределах от –0,006 до +0,016, ΔY от –0,033 до +0,027, ΔR от –0,031 до +0,028 для сечения 1–2–3–4–5 и ΔX от –0,021 до +0,018, ΔY от –0,044 до +0,024, ΔR от –0,040 до +0,028 для сечения 6–7–8–9–10.

Для получения наглядного представления о влиянии сочетания точек наблюдения на значения ΔX , ΔY и ΔR построены соответствующие графики для двух сечений 1–2–3–4–5 и 6–7–8–9–10 (рис. 5, 6).

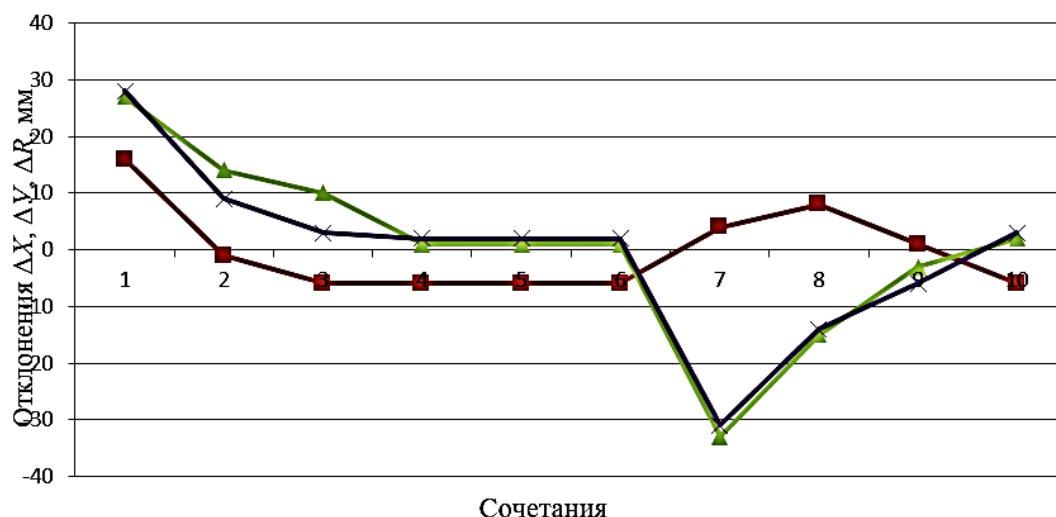


Рис. 5. Графики зависимости ΔX , ΔY , ΔR от сочетания точек для сечения трубы 1–2–3–4–5

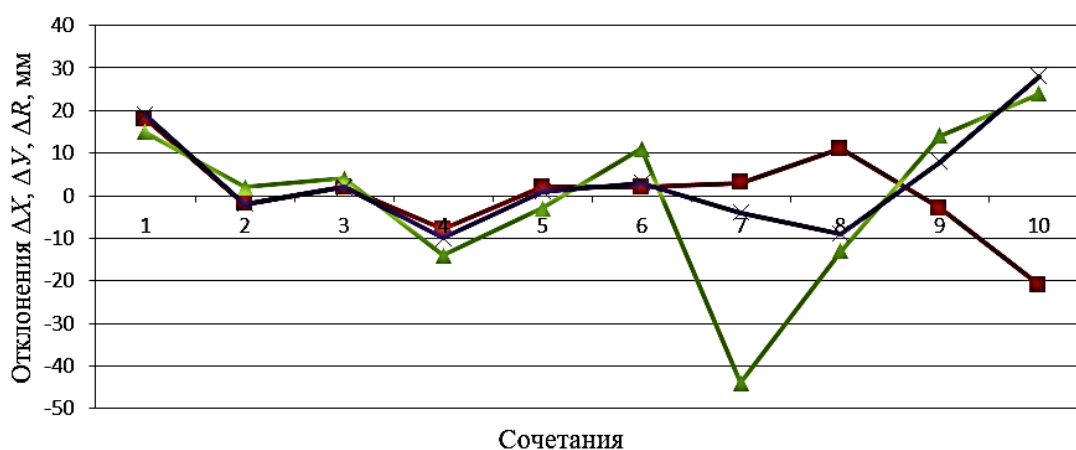


Рис. 6. Графики зависимости ΔX , ΔY , ΔR от сочетания точек для сечения трубы 6–7–8–9–10

Анализ этих графиков позволяет сделать некоторые выводы. Во-первых, наибольшие отклонения имеют место для сочетаний (1) и (10). Наименьшие отклонения соответствуют, за некоторыми исключениями, сочетаниям (2), (3), (4), (5), (6). Как и следовало ожидать, наилучшим оказалось сочетание 5 (1–3–5 и 6–8–10) обоих сечений 1–2–3–4–5 и 6–7–8–9–10. И, наконец, «всплески» отклонений для сочетания 7 (2–3–4 и 7–8–9) можно объяснить тем, что дуги 2–3–4 и 7–8–9, как и дуги сочетаний (1) и (10), составляют малую часть видимого сечения трубы. Следует

сказать, что эти выводы практически идентичны таковым, полученным на основании данных табл. 2.

Таблица 4

Результаты моделирования по четырём измеренным точкам

Сечение	Сочетание	Координаты, радиус и отклонения от средних, м					
		Y	X	R	ΔY	ΔX	ΔR
1	2	3	4	5	6	7	8
1–2–3–4	(1)1–2–3	100,025	127,751	2,035	0,015	0,016	0,018
	(2)1–2–4	100,008	127,738	2,016	–0,002	0,003	–0,001
	(4)1–3–4	100,003	127,725	2,009	–0,007	–0,010	–0,008
	(7)2–3–4	100,003	127,725	2,009	–0,007	–0,010	–0,008
Средние (<i>mean</i>)		100,010	127,735	2,017			
1–2–3–5	(1)1–2–3	100,025	127,751	2,035	0,013	0,021	0,023
	(3)1–2–5	100,003	127,734	2,010	–0,009	0,004	–0,002
	(5)1–3–5	100,003	127,725	2,009	–0,009	–0,005	–0,003
	(8)2–3–5	100,017	127,709	1,993	0,005	–0,021	–0,019
Средние (<i>mean</i>)		100,012	127,730	2,012			
1–2–4–5	(2)1–2–4	100,008	127,738	2,016	0,002	0,008	0,007
	(3)1–2–5	100,003	127,734	2,010	–0,003	0,004	0,001
	(6)1–4–5	100,003	127,725	2,009	–0,003	–0,005	0,000
	(9)2–4–5	100,010	127,721	2,001	0,004	–0,009	–0,008
Средние (<i>mean</i>)		100,006	127,730	2,009			
2–3–4–5	(7)2–3–4	100,013	127,691	1,976	0,002	–0,021	–0,019
	(8)2–3–5	100,017	127,709	1,993	0,006	–0,003	–0,002
	(9)2–4–5	100,010	127,721	2,001	–0,001	0,009	0,006
	(10)3–4–5	100,003	127,726	2,010	–0,008	0,014	0,015
Средние (<i>mean</i>)		100,011	127,712	1,995			
$Y_{mean}, X_{mean}, R_{mean}$		100,010 100,009	127,727 127,724	2,008 2,007			
6–7–8–9	(1) 6–7–8	100,028	127,757	1,779	0,015	0,025	0,027
	(2) 6–7–9	100,008	127,744	1,758	–0,005	0,012	0,006
	(4) 6–8–9	100,002	127,728	1,750	–0,011	–0,004	–0,002
	(7) 7–8–9	100,013	127,698	1,720	0,000	–0,034	–0,032
Средние (<i>mean</i>)		100,013	127,732	1,752			
6–7–8–10	(1) 6–7–8	100,028	127,757	1,779	0,010	0,014	0,016
	(3) 6–7–10	100,012	127,746	1,762	–0,006	0,003	–0,001
	(5) 6–8–10	100,012	127,739	1,761	–0,006	–0,004	–0,002
	(8) 7–8–10	100,021	127,729	1,751	0,003	–0,014	–0,012
Средние (<i>mean</i>)		100,018	127,743	1,763			
6–7–9–10	(2) 6–7–9	100,008	127,744	1,758	–0,002	–0,006	–0,005
	(3) 6–7–10	100,012	127,746	1,762	0,002	–0,004	–0,001
	(6) 6–9–10	100,012	127,753	1,763	0,002	0,003	0,000
	(9) 7–9–10	100,007	127,756	1,768	–0,003	0,006	0,005
Средние (<i>mean</i>)		100,010	127,750	1,763			
7–8–9–10	(7) 7–8–9	100,013	127,698	1,720	0,005	–0,039	–0,037
	(8) 7–8–10	100,021	127,729	1,751	0,013	–0,008	–0,006
	(9) 7–9–10	100,007	127,756	1,768	–0,001	0,019	0,011
	(10) 8–9–10	99,989	127,766	1,788	–0,019	0,029	0,031

Средние (<i>mean</i>)	100,008	127,737	1,757			
<i>Ymean, Xmean, Rmean</i>	100,012	127,740	1,759			
	100,010	127,742	1,760			

В табл. 4 приведены результаты моделирования по четырём измеренным точкам трубы и вычислены Y_{mean} , X_{mean} , R_{mean} , которые практически не отличаются от таковых, вычисленных по пяти измеренным точкам (указанных в знаменателе соответствующих граф табл. 4). На рис. 7 и рис. 8 представлены графики зависимости ΔY , ΔX , ΔR от сочетания точек для четырёхточечных сечений трубы.

На основании данных табл. 4 и графиков на рис. 7 можно констатировать, что наиболее оптимальными являются сочетания (2), (3), (4), (5) и (6).

Аналогично, на основании данных табл. 4 и графиков на рис. 8 можно констатировать, что наиболее оптимальными являются те же сочетания (2), (3), (4), (5) и (6).

В заключение отметим, что радиус нижнего сечения 1–2–3–4–5 был определён путём непосредственного измерения его периметра $2\pi R$ и составил 2,011 м. Радиусы R_{mean} , определённые по пяти и четырём точкам, составили 2,008 м и 2,007 м, то есть отличаются от измеренного всего на 3–4 мм.

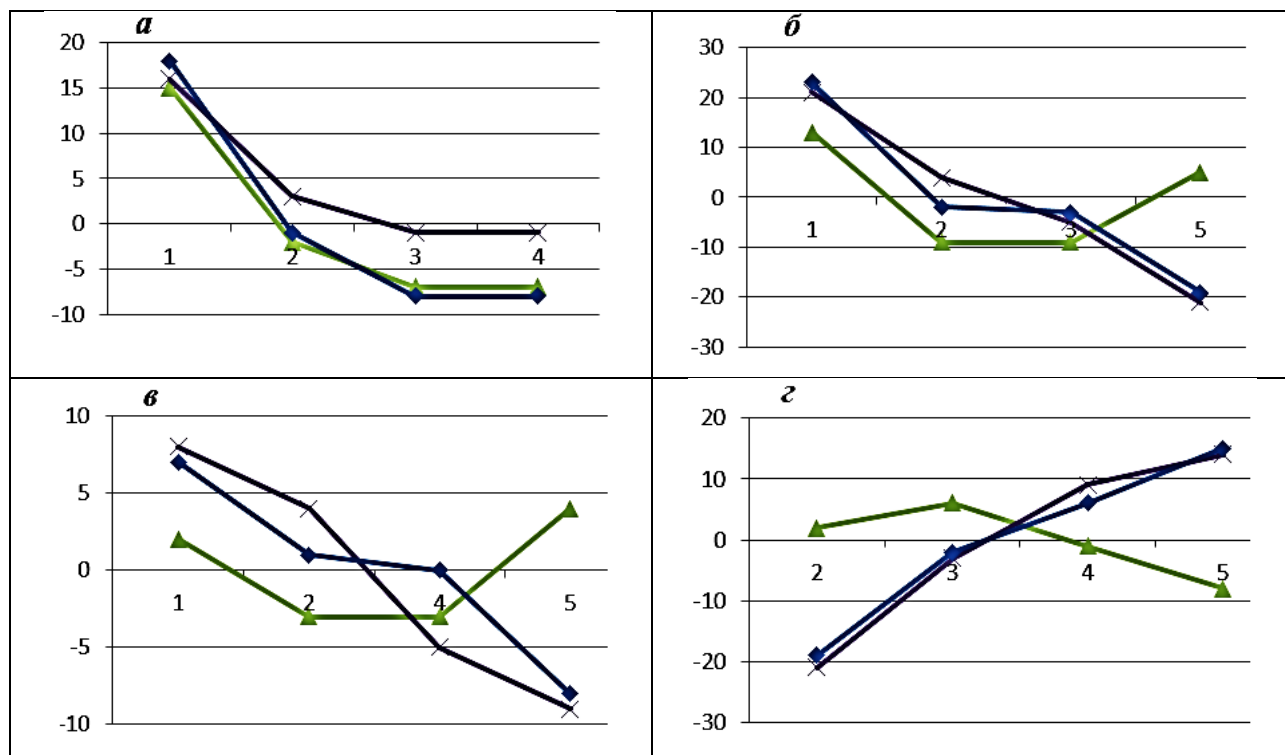


Рис. 7. Графики зависимости ΔY , ΔX , ΔR от сочетания точек для сечений трубы 1-2-3-4 (а), 1-2-3-5 (б), 1-2-4-5 (в) и 2-3-4-5 (г)

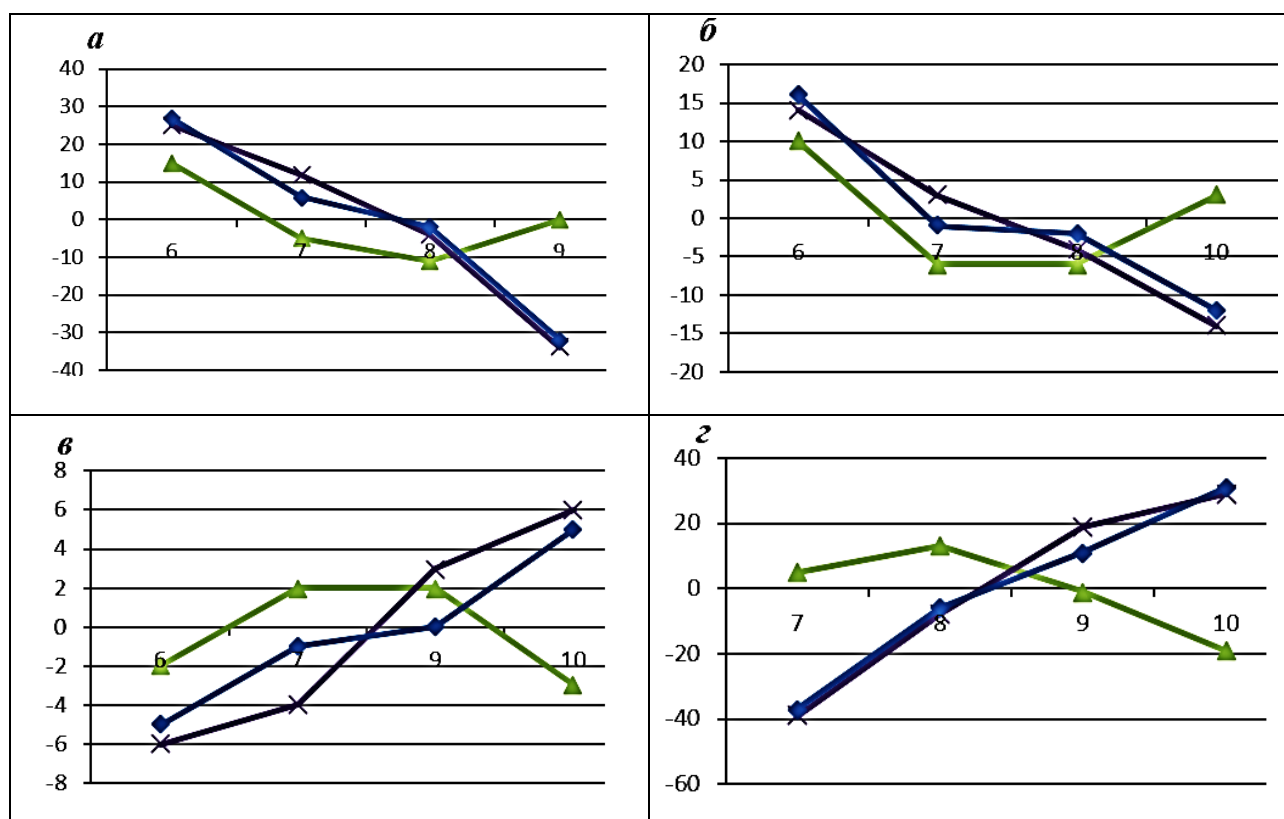


Рис. 8. Графики зависимости ΔU , ΔX , ΔR от сочетания точек для сечений трубы 6-7-8-9 (а), 6-7-8-10 (б), 6-7-9-10 (в) и 7-8-9-10 (г)

Одной из основных отличительных особенностей рассмотренного способа является возможность определения координат любого количества точек почти половины периметра наблюдаемого сечения с последующим выбором наиболее оптимальных сочетаний по три точки из всех. Причем такие измерения можно выполнять для сечений, расположенных на разной высоте сооружения.

Список литературы

1. Шеховцов Г.А. Теоретические основы одностороннего координатного способа определения крена сооружений башенного типа / Г.А. Шеховцов, Р.П. Шеховцова // Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. – 2012. – №5. – С. 30–31.
2. Шеховцов Г.А. Определение положения и радиуса сечений сооружений башенного типа круглой формы односторонним координатным способом / Г.А. Шеховцов, Ю.Н. Раскаткин, М.М. Шульц // Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. – 2015. – №3. – С. 26–31.

3. Кетков Ю.Л. MatLab 7. Программирование, численные методы / Ю.Л. Кетков, А.Ю. Кетков, М.М. Шульц // «БХВ – Петербург». – СПб., 2005, – 752 с.

4. Шеховцов Г.А. Односторонний координатный способ определения крена высоких сооружений башенного типа круглой формы / Г.А. Шеховцов, Р.П. Шеховцова, Ю.Н. Раскаткин // Приволжский научный журнал; Нижегород. гос. архитектур.-строит. ун-т. – Н. Новгород, 2012. – №4. – С. 172–178.