

**Левина Галина Абрамовна**

профессор

**Дахтин Иван Сергеевич**

магистрант

**Булатов Владислав Сергеевич**

магистрант

ФГБОУ ВПО «Южно-Уральский государственный университет» (НИУ)

г. Челябинск, Челябинская область

## **СОБСТВЕННЫЕ ЧАСТОТЫ УПРУГИХ КРУТИЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ ОДНООСНОГО ПОВОРОТНОГО ИСПЫТАТЕЛЬНОГО СТЕНДА**

***Аннотация:** в данной статье одноосный поворотный стенд, предназначенный для испытаний навигационных приборов, рассматривается как механическая система с учетом упругих деформаций кручения валов и соединительной муфты. На основе построенной математической модели авторами выполнен расчет собственных частот. Численные результаты дают представление о достаточно больших значениях собственных частот и свидетельствуют о том, что разрабатываемый стенд будет находиться вдали от резонанса для того диапазона частот вынужденных колебаний, который определен назначением стенда.*

***Ключевые слова:** поворотный стенд, крутильные колебания, математическое моделирование, частотное уравнение, вычисления собственных частот.*

В рассматриваемом стенде поворотный стол, на который устанавливается испытуемый прибор, жестко скреплен с валом, приводимым во вращение синхронным электродвигателем. Вал стола связан с валом двигателя с помощью эластичной муфты. Кинематическая схема стенда представлена на рисунке 1.

Изучение собственных частот стенда, обусловленных упругой податливостью валов и соединительной муфты, является практически важной задачей как на этапе проектирования стенда, так и для анализа сигналов от испытуемых приборов при проведении исследований с помощью стенда.

Особенности задач динамики для стенда диктуются условиями: номинальная скорость вращения стола стенда сравнительно мала ( $\sim 300$  град./с); валу стенда сообщаются двигателем принудительные колебания вокруг оси вращения (с частотой  $\sim 15\text{--}20$  Гц). Стенд может работать как в условиях разгона, торможения и установившегося вращения, так и в условиях вынужденных угловых колебаний.

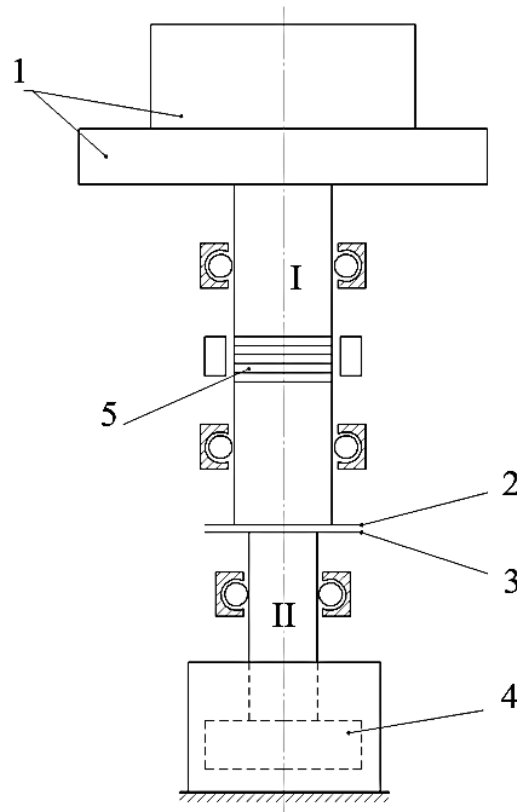


Рис. 1. Кинематическая схема стенда:

1 – стол с прибором; I – вал стола; II – вал двигателя;  
2,3 – элементы муфты; 4 – ротор двигателя; 5 – ламель токоподвода

В задаче о собственных крутильных колебаниях стенда учитываем инерцию стола стенда (вместе с прибором момент инерции  $J_1$ ), инерцию элементов муфты (моменты инерции  $J_2$  и  $J_3$ ), инерцию ротора двигателя (момент инерции  $J_4$ ). Здесь индексы величин  $J_k$  ( $k = 1\text{--}4$ ) соответствуют обозначениям элементов стенда на рисунке 1. Участки I и II составного вала принимаем однородными цилиндрическими безынерционными брусами.

Углы поворотов указанных элементов относительно неподвижного основания обозначаем соответственно через  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ .

Определяем кинетическую энергию механической системы

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 J_i \dot{\varphi}_i^2$$

и потенциальную энергию деформации кручения составного вала с муфтой:

$$U = \frac{1}{2} (c_I(\varphi_1 - \varphi_2)^2 + c_{II}(\varphi_3 - \varphi_4)^2 + c_M(\varphi_2 - \varphi_3)^2),$$

где:

$$c_I = \frac{GJ_{PI}}{l_I}; \quad c_{II} = \frac{GJ_{PII}}{l_{II}}; \quad G = \frac{E}{2(1 + \mu)};$$

$E$  – модуль Юнга,  $\mu$  – коэффициент Пуассона;  $J_I, J_{II}$  – полярные моменты инерции сечений валов I и II;  $c_M$  – коэффициент жёсткости муфты.

Дифференциальные уравнения свободных крутильных колебаний, полученные с помощью уравнений Лагранжа и представленные в отклонениях от установившегося вращения, при условии пренебрежения трением в подшипниках и на ламели записываются в виде

$$\begin{aligned} J_1 \ddot{\varphi}_1 + c_I(\varphi_1 - \varphi_2) &= 0; \\ J_2 \ddot{\varphi}_2 - c_I(\varphi_1 - \varphi_2) + c_M(\varphi_2 - \varphi_3) &= 0; \\ J_3 \ddot{\varphi}_3 - c_M(\varphi_2 - \varphi_3) + c_{II}(\varphi_3 - \varphi_4) &= 0; \\ J_4 \ddot{\varphi}_4 - c_{II}(\varphi_3 - \varphi_4) &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Уравнения (1) имеют частные решения вида [1]:

$$\varphi_k = u_k \sin(\omega t + \alpha), \quad k = \overline{1,4} \quad (2)$$

Подставляя функции (2) в систему (1) и применяя условие существования ненулевого вектора амплитуд  $u = (u_k)$ , приходим к частотному уравнению:

$$\Delta(\omega^2) = \begin{vmatrix} c_I J_1 \omega^2 & -c_I & 0 & 0 \\ -c_I & c_I + c_M J_2 \omega^2 & -c_M & 0 \\ 0 & -c_M & c_{II} + c_M J_3 \omega^2 & -c_{II} \\ 0 & 0 & -c_{II} & c_{II} J_4 \omega^2 \end{vmatrix} = 0. \quad (3)$$

Раскрываем определитель в (3) и записываем частотное уравнение:

$$\Delta(\omega^2) = a_4 \omega^8 + a_3 \omega^6 + a_2 \omega^4 + a_1 \omega^2 + a_0 = 0. \quad (4)$$

Коэффициенты уравнения определяются равенствами:

$$\begin{aligned} a_0 &= 0; a_1 = -c_I c_{II} c_M (J_I + J_2 + J_3 + J_4); \\ a_2 &= c_I c_{II} (J_1 J_3 + J_1 J_4 + J_2 J_3) + c_I c_M (J_1 J_4 + J_2 J_4 + J_3 J_4) + c_{II} c_M (J_1 J_2 + J_1 J_3 + J_1 J_4); \\ a_3 &= -c_I J_3 J_4 (J_1 + J_2) - c_{II} J_1 J_2 (J_3 + J_4) - c_M J_1 J_4 (J_2 + J_3); \\ a_4 &= J_1 J_2 J_3 J_4. \end{aligned}$$

Вследствие  $a_0 = 0$  уравнение имеет нулевой корень, что соответствует возможности вращения вала как сплошного твердого тела. Для определения частот упругих колебаний приходим к уравнению третьей степени относительно квадрата частоты  $\lambda = \omega^2$ :

$$a_4 \lambda^3 + a_3 \lambda^2 + a_2 \lambda + a_1 = 0. \quad (5)$$

Вычисления частот выполнены в системе MATLAB R2015a с применением функции «roots». И использованные в расчетах исходные данные о массовых и геометрических параметрах соответствуют проекту станда, разработка которого ведется на кафедре «Приборостроение» ЮУрГУ [2]. Геометрические параметры муфты согласуются с техническими данными, приведенными в каталоге [3] для эластичной муфты GAS/SG 64 Sh-D.

В таблице приведены значения собственных частот станда при различных коэффициентах жесткости муфты из интервала 100...2500 кНм/рад, полученные при условии симметричной муфты  $J_2 = J_3$ . Указанному в техническом описании муфты коэффициенту жесткости 1400 кНм/рад соответствует значение первой (низшей) частоты 1,53 кГц. Расчеты выполнены при параметрах станда:  $l_I = 3,48 \cdot 10^{-1}$  м, ;  $l_{II} = 5,6 \cdot 10^{-2}$  м; наружные диаметры валов I и II соответственно  $d_I = 5,2 \cdot 10^{-2}$  м,  $d_{II} = 2,2 \cdot 10^{-2}$  м; массы стола и прибора  $m_{ст} = 16$  кг,  $m_{приб} = 16$  кг.

Таблица 1

*Собственные частоты крутильных колебаний станда*

Коэффициент жесткости муфты, кН/рад	100	500	1000	1400	2000	2500
Первая частота, кГц	1,32	1,49	1,51	1,53	1,53	1,53
Вторая частота, кГц	3,21	3,40	3,43	3,44	3,44	3,44
Третья частота, кГц	6,13	11,50	15,9	19,3	22,22	24,78

*Заключение:* полученные на основе построенной математической модели достаточно большие значения собственных частот крутильных упругих колебаний позволяют сделать вывод о том, что применение в рассматриваемом проекте эластичной муфты типа GAS/SG обеспечивает достаточную жесткость конструкции, при которой для заданного диапазона частот вынужденных угловых колебаний (15–20 Гц) система будет находиться вдали от резонанса.

### ***Список литературы***

1. Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле / Пер. с англ. Л.Г. Корнейчука; Под ред. Э.И. Григолюка. – М.: Машиностроение, 1985. – 472 с.
2. Седышев В.В. Одноосный испытательный стенд углового движения / В.В. Седышев, Р.В. Тепляков, В.А. Цапов // Научно-методический журнал «Наука, техника и образование». – М.: Проблемы науки, 2016. – №2 (20). – С. 36–38.
3. Эластичные муфты – жесткие муфты: Каталог [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.servomh.ru/images/katalogi/elasticnie-i-zhestkie-mufti.pdf> (дата обращения: 01.02.2016).