



Шеховцов Геннадий Анатольевич

д-р техн. наук, профессор

Раскаткин Юрий Николаевич

соискатель

ФГБОУ ВПО «Нижегородский государственный
архитектурно-строительный университет»
г. Нижний Новгород, Нижегородская область

О КОСВЕННЫХ СПОСОБАХ ОПРЕДЕЛЕНИЯ РАДИУСА СООРУЖЕНИЙ КРУГЛОЙ ФОРМЫ И НЕКОТОРЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ИХ МОДЕЛИРОВАНИЯ

Аннотация: рассматриваются теоретические основы различных способов определения радиуса инженерных сооружений круглой формы. Приведены формулы для вычисления и оценки точности радиуса. показаны результаты знакового моделирования.

Ключевые слова: радиус, электронный тахеометр, цифровая фотокамера, лазерная рулетка, ошибка.

В геодезии традиционно все измерения делят на две группы. Первая группа включает «прямые» (ещё их называют «непосредственные») измерения, при которых результат получается непосредственно из измерения самой величины. Измерения второй группы называют «косвенными», основанными на известных зависимостях между искомой величиной и непосредственно измеряемыми величинами. В результате косвенных измерений получают вычисленное значение искомой величины.

Необходимость определения радиусов может возникнуть при обмерах инженерных сооружений, имеющих форму тела вращения: дымовые и вентиляционные трубы, воздухонагреватели, градирни, ректификационные колонны, грануляционные башни, доменные печи, силосные башни, копры над стволами шахт, водонапорные башни, радиотелевизионные антенные опоры, колонны зданий, различные резервуары, купола исторических памятников и др. Кроме того,

радиус необходим для определения координат центра сооружения. Фактические радиусы наиболее просто могут быть определены путём непосредственных измерений периметра $2\pi R$ наблюдаемых сечений сооружения. Однако выполнить это на практике проблематично, особенно если эти сечения расположены на разной высоте от земли. В статье рассматриваются косвенные способы определения радиуса сооружений круглой формы.

Так, в работе [1] предлагается вначале определять координаты центра сооружения методом трёх точек на окружности путём выполнения соответствующих угловых и линейных измерений. А затем, после довольно громоздких вычислений, находить радиус сооружения.

В нашей работе [5] показано, что упростить решение поставленной задачи можно, если с помощью электронного тахеометра безотражательного типа сразу определять координаты любых трёх точек даже без предварительной их маркировки на сооружении. Это приводит к значительному сокращению измерительных и вычислительных операций по определению радиуса.

Другим достоинством предлагаемой нами методики является то, что она позволяет определять радиус сечений сооружения, расположенных на разной высоте от земли. Для повышения точности и надёжности получаемых результатов количество наблюдаемых точек можно увеличить. Так, для четырёх точек получим четыре результата, для пяти – десять и т. д. В этом случае перебираются все сочетания по 3 из имеющихся n точек. Для каждой тройки вычисляются параметры окружности, проходящей через эти три точки и затем все найденные параметры усредняются.

Для строгого решения задачи в системе MatLab [9] нами разработана специальная программа, которая подсчитывает координаты центров сечений, их радиусы, строит окружности, находит параметры и вычерчивает усреднённую и найденную по методу наименьших квадратов оптимальную окружность.

Результаты выполненного нами знакового моделирования по трём, четырём и пяти произвольным точкам показали, что параметры усреднённой и оптималь-

ной окружностей получаются практически одинаковыми. Этот вывод иллюстрируется на рис. 1, на котором приведен пример разработанной программы MatLab для четырёх произвольных точек и где видно совпадение усреднённой и оптимальной окружностей.

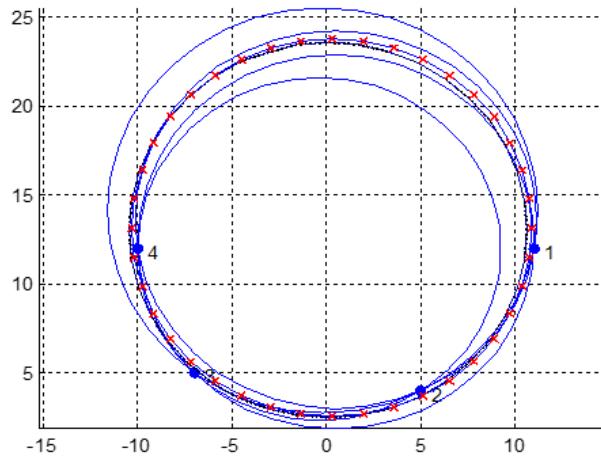


Рис. 1. Пример программы MatLab для четырёх произвольных точек

В работе [4] предлагаются два способа определения радиуса сооружений, имеющих в плане форму круга: способ «продольного базиса» и способ «поперечного базиса». Однако на практике в условиях плотной застройки, бывает трудно выбрать такое местоположение базисных точек, которое обеспечивало бы видимость как самого изучаемого объекта, так и взаимную видимость между этими точками.

В работе [2] описаны пять способов определения радиуса сооружений башенного типа. Они основаны на различных линейно-угловых измерениях с использованием точек касания линий, проведенных из базовой точки к образующей сооружения. Эти точки предлагаются определять с помощью натянутой по этой линии рулетки и отмечания места её касания с сооружением. Однако опыт показывает, что подобным образом положение точек касания будут определено с большой погрешностью, что автоматически скажется на точности определения радиуса.

Для исключения этого недостатка нами предлагается использовать простое устройство, действующий макет которого представлен на рис. 2. С его помощью можно определять положение точки касания с точностью 2–3 мм.



Рис. 2. Определение направления визирного приспособления макета на базисную точку и отмечание на трубе точки его касания

В связи с этим предлагается «линейный» способ определения радиуса сооружения круглой формы. Он предусматривает измерение, например, лазерной рулеткой из некоторой точки A_1 всего двух расстояний: $A_1D = d$ по направлению на центр O сооружения и $A_1K_1 = l$ по направлению касательной к образующей сооружения (рис. 3).

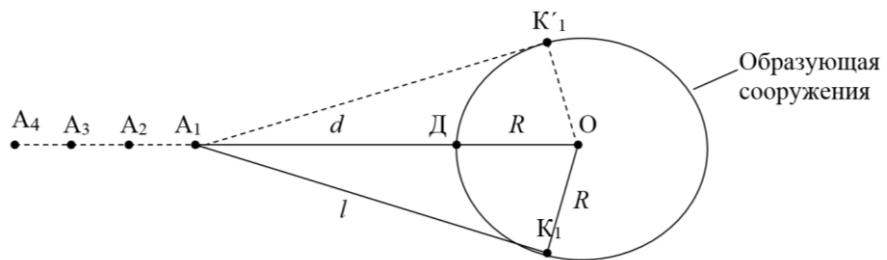


Рис. 3. Схема к определению радиуса «линейным» способом

В этом случае радиус R можно вычислить по формуле

$$R = \frac{l^2 - d^2}{2d}. \quad (1)$$

В таком «линейном» способе для измерения расстояния d с помощью лазерной рулетки, например, HD150 достаточно воспользоваться её клавишей «min-max», проведя лазерным пучком по образующей сооружения слева направо от

точки Д. Минимальное расстояние на дисплее покажет величину d с точностью 2–3 мм, заявленной в паспорте этой рулетки. Что касается расстояния l , то ошибка его измерения в основном будет зависеть от точности определения положения точки касания K_1 на образующей сооружения.

Было выполнено знаковое моделирование этого способа, где в качестве модели фигурировало изображение сечения радиуса 50 условных единиц. Последовательно измерялись с точностью 0,1 мм отрезки l при различных «отстояниях» точки А при d от 50 до 350 условных единиц (ye).

Вычисленные по формуле (1) значения радиуса оказались равными 49,94 – 50,04 и в среднем 49,98, что отличается от истинного значения на 0,02 условных единицы, что составляет 1:2500 от величины радиуса.

В результате исследований формулы (1) с позиций теории ошибок получено выражение (2) для определения m_R средней квадратической ошибки радиуса в зависимости от ошибок m_l и m_d измерения расстояний l и d .

$$m_R^2 = \frac{l^2}{d^2} m_l^2 + \left(\frac{d^2 + l^2}{2d^2} \right)^2 m_d^2 . \quad (2)$$

Подсчитанные по формуле (2) ошибки радиуса m_R для m_l и m_d равных 5, 3 и 2 мм иллюстрируются графиком на рис. 4.

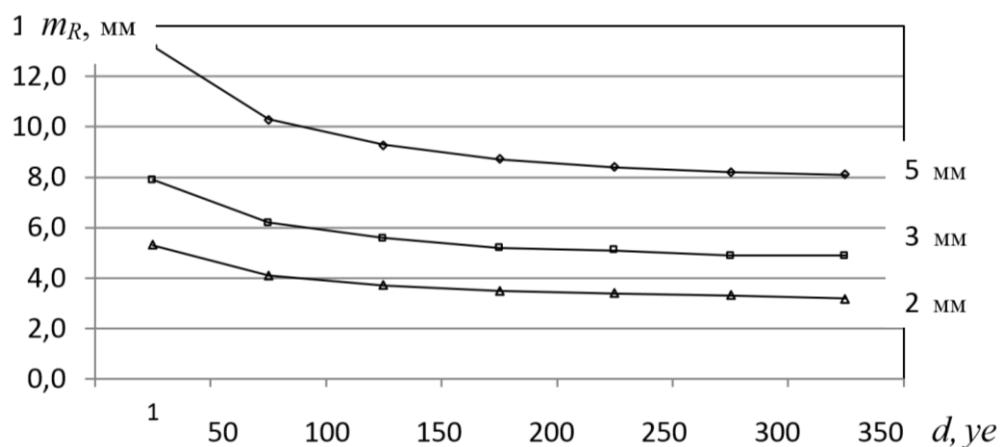


Рис. 4. Графики зависимости ошибки m_R от $m_l = m_d = 5, 3, 2$ мм

На основании этих графиков можно констатировать, что начиная с расстояния d , превышающего радиус в 3–4 и более раза, ошибка радиуса m_R для определённого значения m_l и m_d остаётся практически неизменной. Для контроля можно дополнительно измерить расстояние l по касательной $A_1K'_1$.

С целью подтверждения возможности и уточнения методики использования «линейного» способа были проведены его натурные испытания. В качестве объекта наблюдений выступала дымовая труба с радиусом поперечного сечения в её нижней части около двух метров.

На местности на расстояниях 5, 10, 15 и 20 м от точки D были отмечены точки A_1 , A_2 , A_3 и A_4 (рис. 3). В этих точках последовательно устанавливался штатив на одном уровне с исследуемым сечением трубы, служащий в дальнейшем ориентиром для определения на этом сечении трубы точек $K_{1,2,3,4}$ с помощью действующего макета устройства (рис. 2).

Затем с помощью лазерной рулетки HD150, расположенной на головке штатива, последовательно измерялись расстояния $d_{1,2,3,4}$ по изложенной выше методике и расстояния $l_{1,2,3,4}$ путём наведения лазерного пучка на экран-отражатель, удерживаемый на точках касания $K_{1,2,3,4}$. Одновременно все действия выполнялись с другой стороны трубы, вследствие чего были найдены точки касания $K'_{1,2,3,4}$ (рис. 3) и измерены расстояния $d'_{1,2,3,4}$ и $l'_{1,2,3,4}$. В результате установлено, что полученное среднее значение радиуса отличается

от его истинного значения (найденного из измеренного рулеткой значения $2\pi R$) всего на 6 мм.

В работе [3] приведена методика определения радиуса сооружения фотографическим способом по одиночному снимку и по снимкам стереопары. Однако следует оговориться, что фотограмметрическая обработка снимков потребует квалифицированного исполнителя и знания современных автоматизированных программ такой обработки. В настоящее время для фотограмметрических измерений снимков можно использовать компьютерный стереокомпьютер *KSK-4* или одну из цифровых фотограмметрических систем ЦФС, таких, например, как *ERDAS*, *ENVI*, *PHOTOMOD*.

Широкое распространение неметрических цифровых фотокамер в сочетании с компьютерной техникой позволяют рекомендовать новые фотографические способы определения радиусов сооружений круглой формы [7]. Эти способы предусматривают фотографирование сооружения с приложенной к нему нивелирной рейкой из некоторой точки Φ_1 с одновременным измерением горизонтального расстояния d (рис. 5).

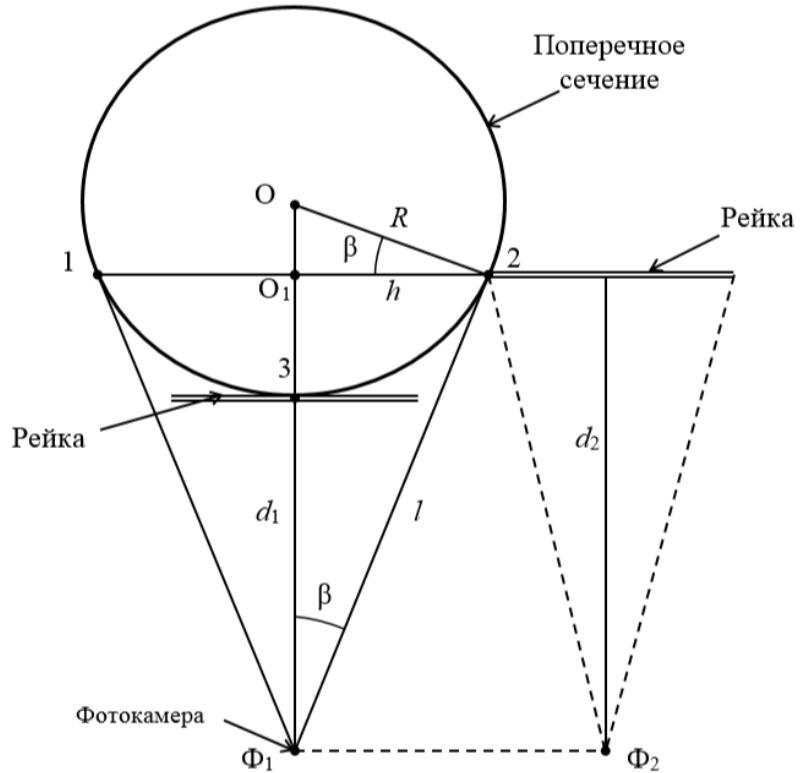


Рис. 5. Схема определения радиуса путём фотографирования с двух точек

Измерив на снимке с помощью, например, программы *ArchiCAD 11* длину хорды $1-2 = 2h$, можно вычислить радиус сооружения:

$$R = \frac{h}{\sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}}, \quad (3)$$

где n – число укладываний радиуса в расстоянии $\Phi_1O = d + R$.

Для масштабирования снимка по нивелирной рейке, расположенной в точке 3, а не в точке O_1 , в длину рейки $2c$ необходимо вводить поправку 2π , которую вычисляют по формуле:

$$\pi = c \frac{n-1}{n^2-1}. \quad (4)$$

Недостатком способа является необходимость знания числа n и довольно сложный переход от метрической величины поправки 2π к пикселям. Избежать этого можно, если определить положение точки касания, например, 2 с помощью описанного выше устройства. Затем, расположив рейку вдоль хорды $1-2$, фотографируют её из точки Φ_2 . Измерив на первом снимке количество пикселей, приходящихся на хорду $1-2$, а на втором снимке количество пикселей, приходящихся на длину рейки, можно непосредственно определить $O_12 = h$ в метрической системе единиц. В этом случае радиус R можно вычислить по значениям только d и h в следующей последовательности.

Вначале по известным значениям d и h находят $t^2 = d^2 - h^2$. Затем по формулам (3) вычисляют вспомогательные величины p , q и D :

$$p = -\frac{1}{3} \left(\frac{1}{12} \frac{t^4}{d^2} + h^2 \right), q = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3 \times 6^2} \frac{t^6}{d^3} + \frac{h^2 t^2}{6d} - \frac{dh^2}{2} \right), D = q^2 + p^3. \quad (5)$$

По формулам (6) вычисляют u , v и их сумму y :

$$u = \sqrt[3]{-q + \sqrt{D}}, v = \sqrt[3]{-q - \sqrt{D}}, y = u + v, \quad (6)$$

и, наконец, по формуле (7) находят значение радиуса R :

$$R = y - \frac{t^2}{6d}. \quad (7)$$

Возможность определения отрезка $O_12 = h$ позволяет рекомендовать так называемый «комбинированный» способ, в котором радиус может быть вычислен по формуле:

$$R = \frac{dh}{l-h}. \quad (8)$$

Результаты измерений d , l и h по схеме на рис. 5 и вычислений радиуса по формуле (8) оказались равными $49,95 - 50,03$, что в среднем составило $49,99$ или отличается от истинного значения всего на $0,01$ условной единицы.

В результате исследований формулы (8) с позиций теории ошибок получено выражение (9) для определения m_R средней квадратической ошибки радиуса в зависимости от ошибок m_h , m_l и m_d измерения расстояний h , l и d .

$$m_R^2 = \frac{1}{(l-h)^2} \left[\frac{d^2}{(l-h)^2} (l^2 m_h^2 + h^2 m_l^2) + h^2 m_d^2 \right]. \quad (9)$$

Подсчитанные по формуле (9) ошибки m_R радиуса для m_d , m_l и m_h , равных между собой соответственно 5, 3 и 2 мм, иллюстрируются графиком на рис. 6.

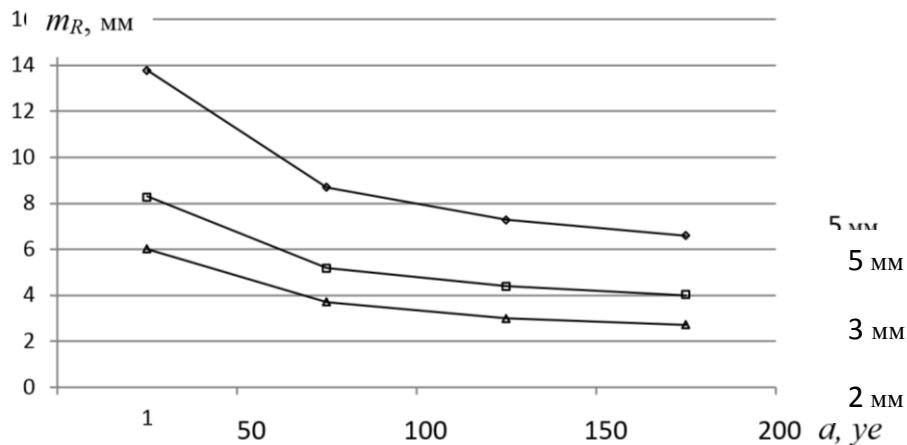


Рис. 6. Графики зависимости ошибки m_R от $m_h = m_l = m_d = 5, 3, 2$ мм

На этих графиках можно наблюдать практически ту же закономерность, что и на рис. 4 для «линейного» способа.

Если ошибки m_h , m_l и m_d не равны между собой, то представляет интерес определение их оптимального сочетания. Для этого были подсчитанные по формуле (9) ошибки радиуса m_R для ошибок m_h , m_l и m_d равных 5, 3 и 2 мм при различных шести их сочетаниях. Результаты вычислений иллюстрируются графиком на рис. 7.

Анализ графиков на рис. 7 позволяет констатировать, что наиболее точные результаты определения радиуса получаются при первом и пятом сочетании, когда ошибка m_h наименьшая по сравнению с ошибками определения l и d .

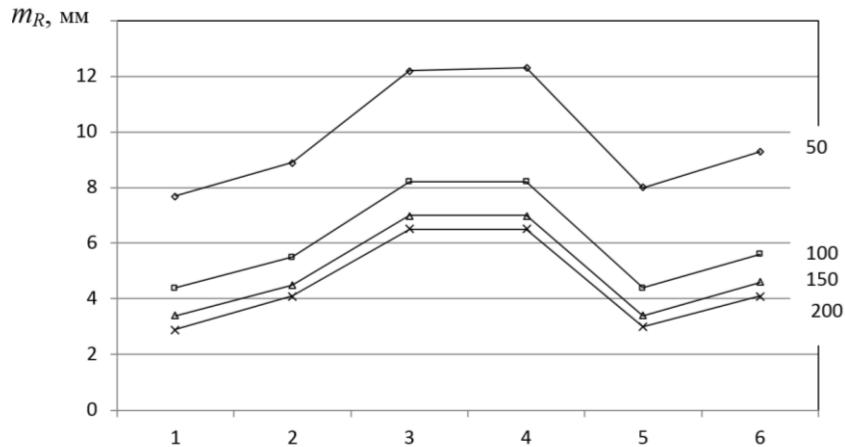


Рис. 7. Графики зависимости ошибки m_R от различного сочетания от 1 до 6 ошибок m_h , m_l и m_d

Если (см. рис. 5) обозначить $\Phi_1 O/R = n$, то радиус R можно определить по формуле

$$R = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}} h = k_1 h . \quad (10)$$

По выполненным выше результатам измерений d и h по схеме на рис. 5 вычисленные по формуле (10) значения радиуса оказались равными 49,96 – 50,01 и в среднем 49,99, что отличается от истинного значения всего на 0,01 условной единицы. Характер изменения коэффициента k_1 представлен на графике (рис. 8).

На основании этого графика можно констатировать, что начиная с n равного 5 и более значения k_1 остаются практически неизменными. Из этого следует, что коэффициент k_1 при соответствующих расстояниях d может не оказывать заметного влияния на точность определения радиуса.

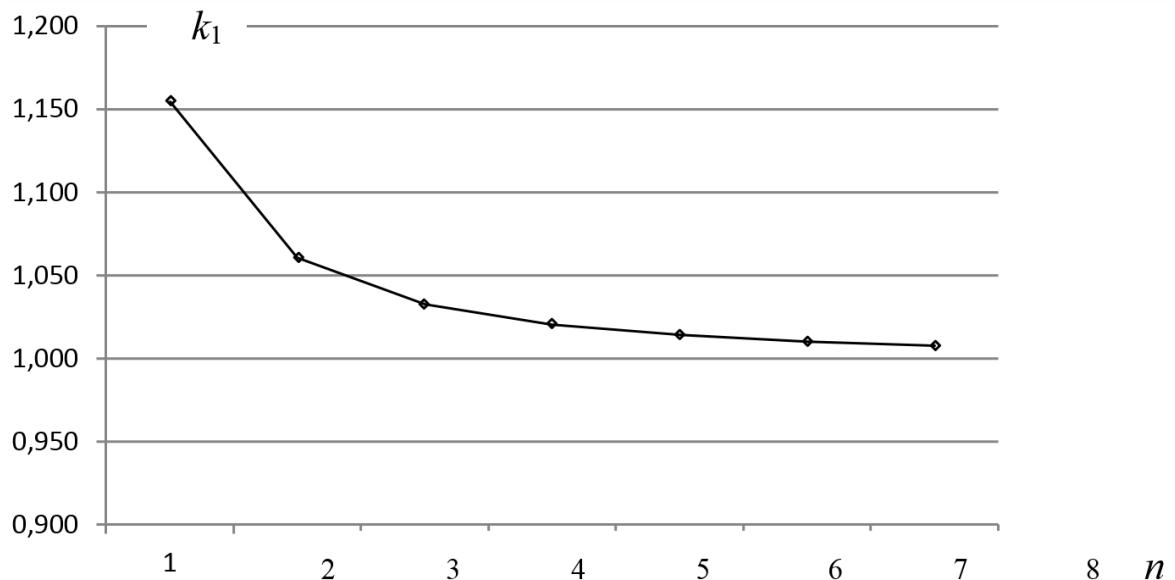


Рис. 8. График зависимости коэффициента k_1 от различных значений n

Действительно, если на основании формулы (10) средняя квадратическая ошибка радиуса m_R будет равна:

$$m_R = k_1 m_h, \quad (11)$$

то результаты вычислений по формуле (11) и построенные по ним графики (рис. 9) наглядно иллюстрируют, что начиная с n равного 5 и более значения m_R остаются практически неизменными.

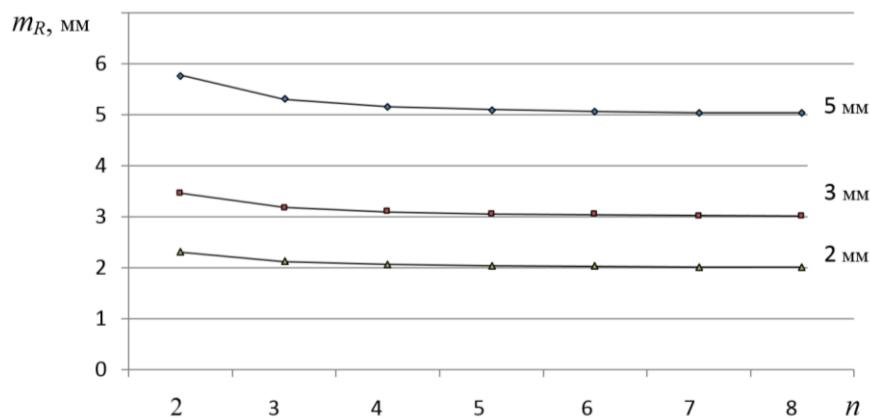


Рис. 9. Графики зависимости ошибки m_R от n

для различных $m_h = 5, 3$ и 2 мм

Как показано в нашей работе [7], необходимо в измеренное на снимке расстояние $O_1-2 = h$ вводить поправку p :

$$p = c \frac{n-1}{n^2 - 1} = ck_2 . \quad (12)$$

На рис. 10 показан график зависимости коэффициента k_2 от n . На основании этого графика можно констатировать, что величина k_2 находится в пределах от 0,3 до 0,1, поэтому коэффициент k_2 подлежит при измерениях обязательному учёту.

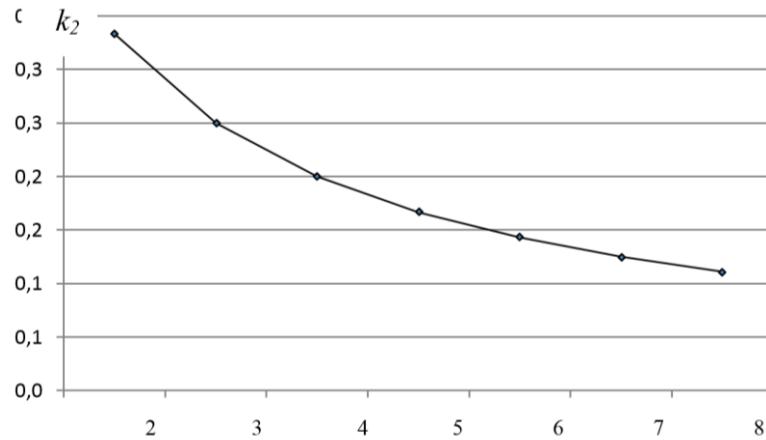


Рис. 10. График зависимости коэффициента k_2 от n

Необходимо отметить, что пользоваться формулами (5) – (7) можно, когда величина d_1 не превышает трёх R . Определение радиуса по значениям d_2 и h лишено этих ограничений и заключается в следующем. Вначале вычисляют угол β (рис. 5):

$$\beta = \arctg (h/d_2), \quad (13)$$

а затем радиус можно вычислить по формулам (14) или (15):

$$R = h/\cos\beta, \quad (14)$$

$$R = \frac{d_1 \sin\beta}{1 - \sin\beta}, \quad (15)$$

С целью проверки предложенной методики и определения условий её применения были проведены соответствующие измерения сечения дымовой трубы радиусом 2 м (рис. 11) с трёх положений точек Φ_1 и Φ_2 .



Рис. 11. Фотографирование базиса для определения d_1 , Δ_{1-2} и d_2

Выбор расстояний d_1 в пределах 5 м был обусловлен тем, что они не должны превышать трёх R для возможности использования формул (5) – (7). Относительные ошибки определения радиуса по формуле (7) и по формуле (14) оказались одинаковыми в пределах 7,5 – 4,5%, в то время как ошибки вычисленного радиуса по формуле (15) находятся в пределах 3 – 1%. Причём наблюдается отмеченная ранее тенденция повышения точности с увеличением расстояния от камеры до базиса.

На основании вышесказанного предложен способ определения радиуса, показанный на рис. 12, предусматривающий измерение расстояния d и фотографирование сооружения только из одной точки Φ_1 .

Решение поставленной задачи заключается в определении на фотографии количества пикселей, приходящихся на длину рейки и количества пикселей приходящихся на отрезок 1–2 (рис. 12). Умножив величину 1–2 в пикселях на отношение длины рейки в метрах на длину рейки в пикселях, получают приблизительное значение ЛП в метрах.

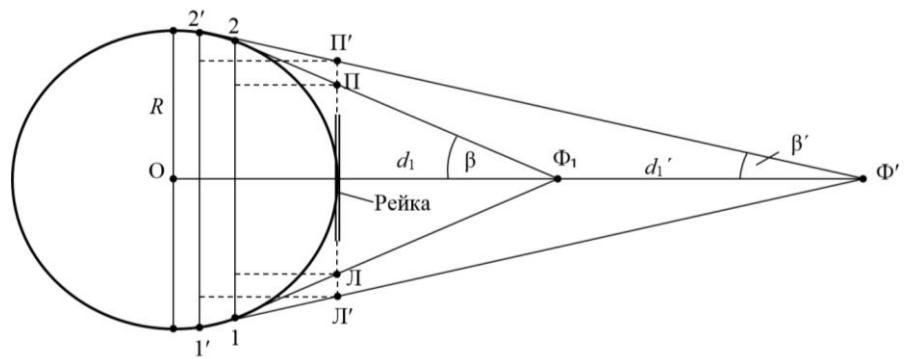


Рис. 12. Схема к определению радиуса путём фотографирования из одной точки

Как следует из схемы на рис. 12, с увеличением расстояния d_1 угол $\beta = \arctg [(\text{ЛП})/2d_1]$ уменьшается, хорда 1–2 приближается к диаметру сечения $2R$, а отрезок ЛП приближается к величине хорды 1–2. Поэтому, для обеспечения требуемой точности определения R необходимо знать такое расстояние d_1' , при котором ошибка определения радиуса не превысит ошибок определения расстояния и ЛП.

Исследование с позиций теории ошибок формул для β и R при различных расстояниях $d = nR$ показало, что начиная с $n = 5$ и более, средняя квадратическая ошибка (СКО) m_R определения радиуса остаётся практически одной и той же независимо от расстояния d . Её величина зависит только от СКО $m_{\text{ЛП}}$ и m_d .

Предлагаемый способ был опробован путём фотографирования дымовой трубы (см. рис. 10) с приложенной к ней нивелирной рейкой с расстояний 5, 10, 15, 20 и 25 м, что соответствует величине n от 1 до 12. Полученные в результате измерений данные сравнивались с истинным радиусом сечения. Расхождения составили соответственно 14, 12, 10, 8 и 4 мм, что подтверждают возможность использования рассматриваемой методики для фотографического способа определения радиуса сооружения круглой формы.

Другой способ поясняется рис. 12 и заключается в измерении двух расстояний d_1 и d_2 путём фотографирования базиса только из одной точки Φ_1 . Вначале фотографируют базис в точке 3. Затем устанавливают его в точке касания 1 или

2, располагая рейку горизонтально и перпендикулярно оптической оси фотокамеры. Этого можно достичь с помощью любого визирного приспособления, закреплённого в середине рейки и перпендикулярно ей.

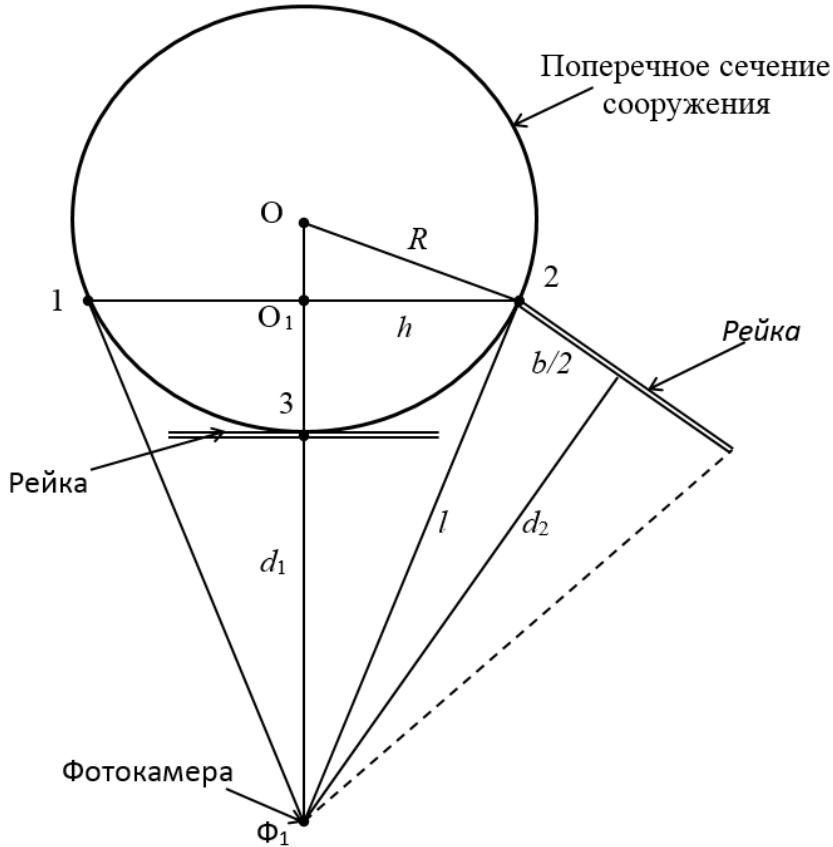


Рис. 13. Схема определения радиуса по двум расстояниям d_1 и d_2

Измеряют на снимках количество пикселей Δ_1 и Δ_2 , приходящихся на длину рейки в первом и втором положении. По этим данным определяют два расстояния d_1 и d_2 и, вычислив $l^2 = d_2^2 + b^2/4$, находят радиус по формуле

$$R = \frac{l^2 - d_1^2}{2d_1}. \quad (16)$$

Вообще говоря, расстояние l можно определить по фотографии рейки, расположенной вертикально в точке касания 1 или 2, для чего необходимо предварительно выполнить соответствующую калибровку фотокамеры.

В заключение отметим, что в «линейном» способе для измерения расстояния d с помощью лазерной рулетки, например, HD150 достаточно воспользово-

ваться её клавишей «min-max», проводя лазерным пучком по образующей сооружения слева направо от точки 5. Минимальное расстояние на дисплее покажет величину d с точностью 2–3 мм заявленной в паспорте этой рулетки.

Что касается расстояния l , то ошибка его измерения в основном будет зависеть от точности определения положения точек касания 1 и 2 (рис. 5) на поперечном сечении сооружения. Поэтому, для обеспечения требуемой точности определения радиуса R , можно поступать следующим образом. Вначале «линейным» способом получить R и найти величину $n = (d+R)/R$, фигурирующую в формулах (10) и (12), а затем «фотографическим» способом определить h и вычислить R . Среднюю квадратическую ошибку m_n в зависимости от ошибок m_d и m_R можно определить по формуле:

$$m_n^2 = \frac{1}{R^2} \left(m_d^2 + \frac{d^2}{R^2} m_R^2 \right). \quad (17)$$

Результаты вычислений по формуле (17) для радиуса R равного 5 м, $m_d = 5$ мм и при различных значениях m_R иллюстрируются графиками на рис. 14.

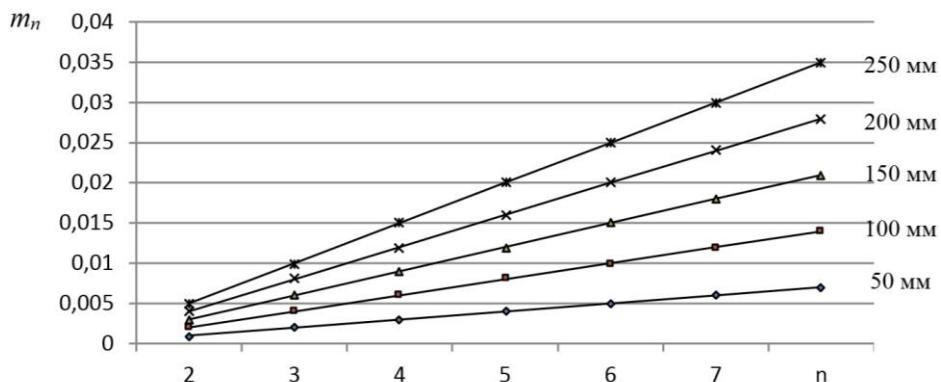


Рис. 14. Графики зависимости ошибки m_n от ошибок $m_d = 5$ мм и $m_R = 50, 100, 150, 200$ и 250 мм

Эти данные свидетельствуют, что даже при больших значениях m_R ошибки m_n практически не окажут влияния на точность определения радиуса «фотографическим» способом.

Причём с помощью формулы (2), задавая m_R и m_d , можно определить необходимую точность измерения расстояния l , а по графикам на рис. 14 по выбранному значению m_n определить оптимальное количество «отстояний» n для любого радиуса.

Список литературы

1. Кислый И.М. Определение центра инженерного сооружения цилиндрической или конусообразной формы / И.М. Кислый, В. С. Сова // Геодезия и картография, – 1969. – С. 29–31.
2. Русков А.М. Способы определения радиусов сооружения башенного типа / А.М. Русков, И.Ф. Болгов // Геодезические методы контроля в стр-ве. – Куйбышев, – 1970. – С. 82–86.
3. Сердюков В.М. Фотограмметрия в инженерно-строительном деле / В.М. Сердюков – М.: Недра, 1970. – 136 с.
4. Соустин В.Н. О методах определения радиуса и координат центра сооружений, имеющих в плане форму круга / В.Н. Соустин // Геодезия и картография, – 1970. – С. 40–43.
5. Шеховцов Г.А. Определение радиуса сооружений круглой формы электронным тахеометром / Г.А. Шеховцов, Р.П. Шеховцова // «Промышленная безопасность – 2011». Сб. статей. – Н. Новгород: Нижегород. гос. архит.-строит. ун-т. – 2011. – С. 39–41.
6. Шеховцов Г.А. Односторонний координатный способ определения крена высоких сооружений башенного типа круглой формы / Г.А. Шеховцов, Р.П. Шеховцова, Ю.Н. Раскаткин // Приволжский научный журнал. – Н. Новгород: Нижегород. гос. архит.-строит. ун-т. – 2012, – №4 – С. 172–178.
7. Шеховцов Г.А. Определение радиуса сооружений круглой формы фотографическим способом / Г.А. Шеховцов, Р.П. Шеховцова, Ю.Н. Раскаткин // «Промышленная безопасность – 2012». Сб. статей. – Н. Новгород: Нижегород. гос. архит.-строит. ун-т. – 2012. – С. 46–49.

8. Шеховцов Г.А. О точности определения радиуса сооружений круглой формы линейно-угловым способом / Г.А. Шеховцов, Ю.Н. Раскаткин // «Промышленная безопасность – 2013». Сб. статей. – Н. Новгород: Нижегород. гос. архит.-строит. ун-т. – 2013. – С. 54–57.

9. Кетков Ю.Л. Программирование, численные методы MatLab 7. / Ю.Л. Кетков, А.Ю. Кетков, М.М. Шульц // БХВ-Петербург. – СПб., 2005, – 752 с.