

Казакова Анастасия Олеговна

канд. физ.-мат. наук, доцент

ФГБОУ ВПО «Чувашский государственный

университет им. И.Н. Ульянова»

г. Чебоксары, Чувашская Республика

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ К ЧИСЛЕННОМУ МОДЕЛИРОВАНИЮ КРУЧЕНИЯ СТЕРЖНЯ

Аннотация: в данной статье рассмотрена математическая модель кручения стержня произвольного сечения, которая описывается гармонической функцией. Задача сводится к нахождению этой функции по заданной на границе сечения стержня ее нормальной производной. Автором показана возможность применения численного метода граничных элементов к решению указанной задачи и на тестовом примере подтверждена его эффективность.

Ключевые слова: кручение стержня, гармоническое уравнение, задача Неймана, метод граничных элементов, численное моделирование.

1. Построение математической модели. Пусть цилиндр произвольного сечения с боковой поверхностью S и торцами S_1 и S_2 находится под действием внешних крутящих моментов M и $-M$, приложенных на его торцах (рис. 1).

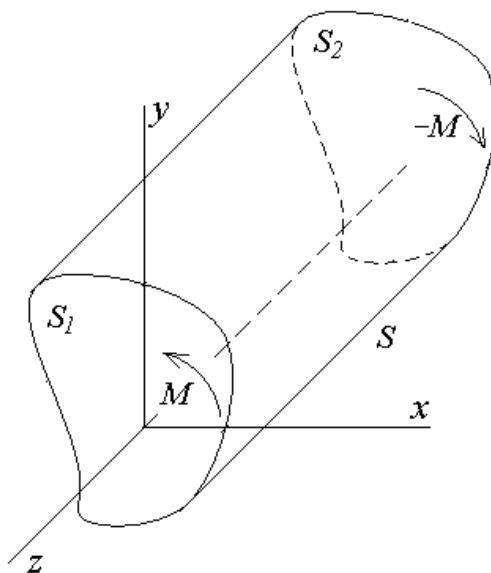


Рис. 1

Математическая модель задачи о напряженно-деформированном состоянии стержня описывается следующими уравнениями [1]:

1) уравнения равновесия

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} + F_x = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} + F_y = 0, \\ \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + F_z = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{zz} , $\sigma_{xy} = \sigma_{yx}$, $\sigma_{yz} = \sigma_{zy}$, $\sigma_{xz} = \sigma_{zx}$ – напряжения, возникающие в стержне под действием заданных нагрузок F_x , F_y , F_z ;

2) уравнения связи напряжений и деформаций ε_{xx} , ε_{yy} , ε_{zz} , ε_{xy} , ε_{yz} , ε_{xz}

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} = 2G\varepsilon_{xx} + \lambda(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}), \quad \sigma_{yy} = 2G\varepsilon_{yy} + \lambda(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}), \\ \sigma_{zz} = 2G\varepsilon_{zz} + \lambda(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}), \quad \sigma_{xy} = G\varepsilon_{xy}, \quad \sigma_{yz} = G\varepsilon_{yz}, \quad \sigma_{xz} = G\varepsilon_{xz}, \end{aligned} \quad (2)$$

где G – модуль упругости, λ – параметр Ламе (характеристики материала);

3) геометрические уравнения Коши

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y}, \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}, \\ \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right), \quad \varepsilon_{yz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right), \quad \varepsilon_{xz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right), \end{aligned} \quad (3)$$

где u_x , u_y , u_z – компоненты вектора перемещений точки стержня.

Пусть под действием моментов M и $-M$ верхнее основание малого слоя толщины dz цилиндра поворачивается относительно неподвижного основания S_2 на малый угол $d\varphi$, тогда вектор перемещения всех его точек

$$d\mathbf{u} = d\varphi \mathbf{k} \times \mathbf{r} = \frac{d\varphi}{dz} \mathbf{k} \times (x\mathbf{i} + y\mathbf{j}) dz,$$

где \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} – единичные направляющие векторы осей координат.

Для однородного цилиндра можно положить, что $d\varphi / dz = const = \alpha$, тогда

$$u_x = -\alpha yz, \quad u_y = \alpha xz. \quad (4)$$

Кроме того, точки перемещаются и вертикально, т. е. u_z является функцией от координат x и y . Для малых деформаций ее можно искать в виде

$$u_z = \alpha f(x, y). \quad (5)$$

Подставляя (4) и (5) в (3), находим:

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} = \varepsilon_{xy} = 0, \quad \varepsilon_{yz} = \frac{\alpha}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial y} + x \right), \quad \varepsilon_{xz} = \frac{\alpha}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - y \right).$$

Из (2) следует, что

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \sigma_{xy} = 0, \quad \sigma_{yz} = G \frac{\alpha}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial y} + x \right), \quad \sigma_{xz} = G \frac{\alpha}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - y \right). \quad (6)$$

Из формул (6) видно, что первые два уравнения равновесия (1) выполняются автоматически, а третье приводится к виду

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0, \quad (7)$$

т. е. задача о кручении сводится к решению уравнения Лапласа.

2. *Границное условие.* Функция, удовлетворяющая уравнению (7), называется *гармонической функцией*. Для ее нахождения необходимо задать краевое условие. Пусть s – дуговая абсцисса контура C , представляющего границу перпендикулярного сечения цилиндра, а τ и \mathbf{n} – единичные вектора касательной и нормали к нему, тогда

$$\begin{aligned} dx &= ds \cos(\tau x) = -ds \cos(\mathbf{n}, y), \\ dy &= ds \cos(\tau y) = ds \cos(\mathbf{n}, x). \end{aligned} \quad (8)$$

В данной задаче краевое условие получается из условия на боковой поверхности S : $\mathbf{p} = 0$. Вектор напряжения $\mathbf{p} = p_x \mathbf{i} + p_y \mathbf{j} + p_z \mathbf{k}$, где

$$p_x = \sigma_{xx} n_x + \sigma_{xy} n_y + \sigma_{xz} n_z, \quad p_y = \sigma_{yx} n_x + \sigma_{yy} n_y + \sigma_{yz} n_z, \quad p_z = \sigma_{zx} n_x + \sigma_{zy} n_y + \sigma_{zz} n_z,$$

а вектор нормали $\mathbf{n} = n_x \mathbf{i} + n_y \mathbf{j}$, откуда имеем на боковой поверхности

$$\sigma_{xx} n_x + \sigma_{xy} n_y = 0, \quad \sigma_{yx} n_x + \sigma_{yy} n_y = 0, \quad \sigma_{zx} n_x + \sigma_{zy} n_y = 0. \quad (9)$$

Первые два условия выполняются тождественно, а третье принимает вид

$$G \frac{\alpha}{2} \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x} - y \right) \cos(\mathbf{n}, x) + \left(\frac{\partial f}{\partial y} + x \right) \cos(\mathbf{n}, y) \right] = 0.$$

Отсюда видно, что нормальная производная искомой функции на контуре

$$\frac{\partial f}{\partial n} = y \cos(\mathbf{n}, x) - x \cos(\mathbf{n}, y) = y \frac{dy}{ds} + x \frac{dx}{ds} = \frac{d}{ds} \left(\frac{x^2 + y^2}{2} \right). \quad (10)$$

Полученную модель – уравнения (7) и (10) – называют *задачей Неймана* для уравнения Лапласа. Как видно, модель не зависит от параметров G и λ , т. е. *функция кручения* $f(x, y)$ определяется чисто геометрически для всех стержней с одинаковыми сечениями независимо от материала.

3. Интегральное уравнение для определения функции кручения. Итак, искомые напряжения при кручении стержня определяются функцией кручения $f(x, y)$, которая в плоском сечении удовлетворяет гармоническому уравнению (7), а на контуре C поперечного сечения удовлетворяет граничному условию (10), которое можно переписать в виде

$$\frac{\partial f}{\partial n} = \tilde{x}(s) \tau_x(s) + \tilde{y}(s) \tau_y(s), \quad s \in C, \quad (11)$$

где $\tilde{x}(s)$, $\tilde{y}(s)$ и компоненты единичного касательного вектора являются заданными функциями от дуговой абсциссы.

Гармоническая функция $f(x, y)$ во внутренности поперечного сечения стержня может быть представлена в виде тождества Грина [2]:

$$f(x, y) = \iint_C f(\tilde{x}, \tilde{y}) H_0(r) ds - \iint_C \frac{\partial}{\partial n} f(\tilde{x}, \tilde{y}) G_0(r) ds, \quad (12)$$

где $G_0(r) = \frac{1}{2\pi} \ln r$, $r = \sqrt{(x - \tilde{x})^2 + (y - \tilde{y})^2}$, $H_0 = \frac{\partial G_0}{\partial n}$.

На границе поперечного сечения, $(x, y) \in C$, тождество Грина имеет вид

$$\frac{1}{2} f(x, y) = \iint_C f(\tilde{x}, \tilde{y}) H_0(r) ds - \iint_C \frac{\partial}{\partial n} f(\tilde{x}, \tilde{y}) G_0(r) ds. \quad (13)$$

В силу условия (11), второе слагаемое правой части (13) известно, и уравнение (13) представляет интегральное уравнение относительно граничных значений функции f . После определения граничных значений функция кручения и ее производные для нахождения напряжений вычисляются во всех внутренних точках по формуле (12).

4. Применение метода граничных элементов. Для решения уравнения (13) методом граничных элементов [3] аппроксимируем контур C N -многоугольником с вершинами в точках $(x_j, y_j) \in C, j = 1, \dots, N$. По этим точкам определяются все геометрические параметры граничных элементов L_j . Уравнение (13) может быть представлено на границе области в виде суммы

$$\frac{1}{2}f(x, y) + \sum_{j=1}^N f(x_j^*, y_j^*) \int_{L_j} H_0(r) ds = \sum_{j=1}^N Q(x_j^*, y_j^*) \int_{L_j} G_0(r) ds, \quad (14)$$

где

$$Q(x_j^*, y_j^*) = (\partial f / \partial n) \Big|_{x_j^*, y_j^*} = \left. \left(\tilde{x}(s) \frac{d\tilde{x}(s)}{ds} + \tilde{y}(s) \frac{d\tilde{y}(s)}{ds} \right) \right|_{x_j^*, y_j^*}, \quad (15)$$

x_j^* и y_j^* – некоторые значения координат точек на граничном элементе L_j ;

в дальнейшем будем считать их средними величинами в данном интервале, т. е. $x_j^* = 0.5(x_j + x_{j+1})$, $y_j^* = 0.5(y_j + y_{j+1})$. Обозначая далее

$$f(x_j^*, y_j^*) = F_j, \quad Q(x_j^*, y_j^*) = Q_j, \quad \frac{\delta(i, j)}{2} + \int_{L_j} H_0(r_i) ds = A_{ij}, \quad \int_{L_j} G_0(r_i) ds = B_{ij}, \quad (16)$$

где $r_i = \sqrt{(x_i^* - \tilde{x})^2 + (y_i^* - \tilde{y})^2}$ – расстояние от i -го узла до точки интегрирования, можно записать сумму (14) в виде системы уравнений

$$\sum_{j=1}^N F_j A_{ij} = \sum_{j=1}^N Q_j B_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

Если ввести векторы \mathbf{F} и \mathbf{Q} с компонентами F_j и Q_j , матрицы \mathbf{A} и \mathbf{B} с компонентами A_{ij} и B_{ij} , то эта система запишется в матричном виде

$$\mathbf{AF} = \mathbf{BQ}. \quad (17)$$

Компоненты матриц **A** и **B** можно вычислить численно, но также они могут быть найдены аналитически. Для этого следует перейти к локальной системе координат (ξ_j, η_j) с центром в средней точке j -го элемента и направить действительную ось по данному элементу. Если перейти к новой переменной $s = h_j t / 2$, то изменение параметра t в пределах $(-1, 1)$ будет соответствовать j -му элементу. В локальной системе координат i -я контрольная точка имеет координаты

$$\xi_{ij} = \frac{h_j}{4\pi} [(x_i^* - x_j^*)s_{x_j} + (y_i^* - y_j^*)s_{y_j}], \quad \eta_{ij} = \frac{h_j}{4\pi} [(y_i^* - y_j^*)s_{x_j} - (x_i^* - x_j^*)s_{y_j}].$$

Тогда функция Грина и ее нормальная производная

$$G_0 = \frac{h_j}{4\pi} \ln \frac{2}{h_j \sqrt{(\xi_j - \xi_{ij})^2 + \eta_{ij}^2}}, \quad \frac{\partial G_0}{\partial n} = -\frac{\eta_{ij}}{2\pi [(\xi_j - \xi_{ij})^2 + \eta_{ij}^2]}. \quad (18)$$

Интегрируя функции (18) на отрезке $[-1, 1]$, получаем следующие выражения для компонент матриц *A* и *B*:

$$A_{ij} = \begin{cases} 1/2, & \eta_{ij} = 0, \quad i = j, \\ -\frac{1}{2\pi} \left(\operatorname{arctg} \frac{1 - \xi_{ij}}{\eta_{ij}} + \operatorname{arctg} \frac{1 + \xi_{ij}}{\eta_{ij}} \right), & \eta_{ij} \neq 0, \quad i \neq j, \\ 0, & \eta_{ij} = 0, \quad i \neq j, \end{cases}$$

$$B_{ij} = \frac{h_j}{2\pi} \left(1 - \ln \frac{h_j}{2} - \frac{(1 - \xi_{ij}) \ln p_{ij} + (1 + \xi_{ij}) \ln q_{ij}}{4} + \pi \eta_{ij} A_{ij} \right),$$

где

$$p_{ij} = (1 - \xi_{ij})^2 + \eta_{ij}^2, \quad q_{ij} = (1 + \xi_{ij})^2 + \eta_{ij}^2.$$

Поскольку $d\tilde{x}(s) / ds = \tau_x$, $d\tilde{y}(s) / ds = \tau_y$, то компоненты вектора *Q*

$$Q_j = x_j^* \tau_{x_j^*} + y_j^* \tau_{y_j^*}.$$

Значения функции кручения в контрольных точках вычисляются из (17):

$$\mathbf{F} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{Q}.$$

5. Тестовый пример (кручение стержня эллиптического сечения). Рассмотрим задачу кручения стержня, сечение которого представляет собой эллипс с полуосами $a = 1$, $b = 0.25$. Ранее было показано, что функция кручения определяется чисто геометрически и не зависит от материала, из которого сделан стержень. Функция кручения для стержня эллиптического сечения может быть найдена аналитически [4] и имеет вид:

$$f(x, y) = \frac{b^2 - a^2}{b^2 + a^2} xy.$$

Решение может быть также найдено численно с использованием метода гравицальных элементов. На рис. 2 (a) представлено сравнение численных и аналитических результатов для функции кручения на границе области: сплошной линией показан график, соответствующий точному аналитическому решению, а точками – результаты решения с применением описанного численного алгоритма при $N = 40$. На рис. 2 (б) представлен график касательного напряжения на границе области, полученного после аппроксимации узловых значений функции кручения кубическими сплайнами:

$$\tau = x \frac{dy}{ds} - y \frac{dx}{ds} + \frac{df}{ds}.$$

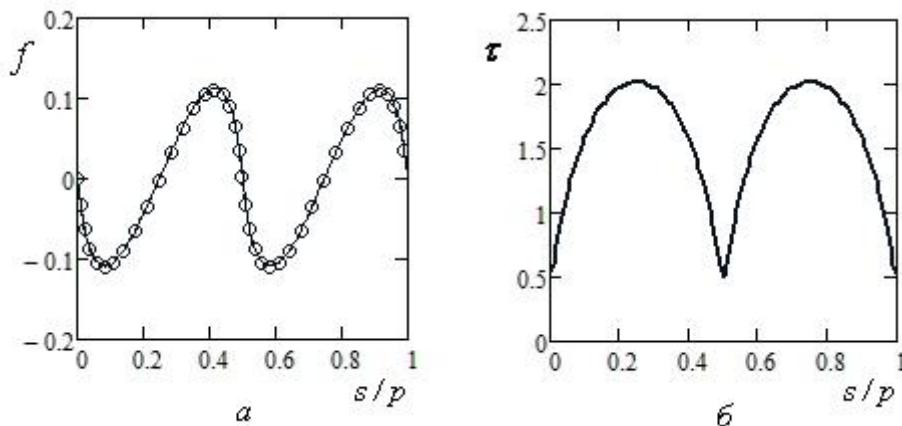


Рис. 2

Список литературы

1. Тимошенко С.П. Теория упругости / С.П. Тимошенко, Д. Гудьер. – М.: Наука, 1975. – 560 с.

2. Терентьев А.Г. Применение полигармонических функций к решению двумерных задач теории упругости / А.Г. Терентьев, О.А. Казакова // XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. – Казань, 2015. – С. 3703–3706.
3. Terentiev A.G. The Hydrodynamics of Cavitating Flows / A.G. Terentiev, I.N. Kirschner, J.S. Uhlman. – Backbone Publishing Company, USA, 2011. – 598 p.
4. Ландау Л.Д. Теория упругости / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – М.: Наука, 1987. – 248 с.