

Иванова Ксения Олеговна

студентка

Ротова Виктория Анзорьевна

канд. техн. наук, доцент, преподаватель

ФГБОУ ВО «Оренбургский государственный
аграрный университет»

г. Оренбург, Оренбургская область

МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ С ПОМОЩЬЮ ИНТЕГРАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

***Аннотация:** в данной статье рассматривается важность определенного интеграла в построении экономических задач для исследования и моделирования процессов в экономике.*

***Ключевые слова:** интегральное исчисление, определенный интеграл, прогнозирование экономических процессов.*

Значимость интеграла в моделировании экономических задач весьма велика. С целью изучения и прогнозирования процессов, которые случаются в экономике, интегральное вычисление предоставляет обширный математический аппарат.

Само собой разумеется, фундаментом экономической концепции является производство. Данную экономическую концепцию допускается расценивать как совокупность управляемой и управляющей систем. Из этого следуют различные характерные черты:

- колоссальные масштабы производства как управляемой концепции;
- с совершенствованием научно-технического прогресса и формированием производительных сил меняются характеристики системы, что приводит к необходимости изучения новых закономерностей формирования производства и их применения в управлении;

- необходимость учета совокупности общественных, биотических, природоохранных и прочих обстоятельств сопряжено с участием человека в производстве как обязательного элемента производительных сил общества;
- рост требований к методам сбора, сбережения, обработки информации является результатом усложнения производства;
- ее дифференциации по степеням иерархии с учетом существенности с точки зрения принятия управленческих постановлений.

При использовании интегрального метода следует соблюдать требование непрерывной дифференцируемости функции, где в качестве аргумента принимается какой-либо экономический коэффициент. Независимо от количества элементов, которые вступают в модель, а также независимо от формы связи между этими составляющими интегральное исчисление определяет единый аспект к постановлению моделей разных видов. При его использовании существует способ получения наиболее аргументированных результатов вычисления воздействия единичных факторов, чем при применении прочих способов.

Определение определенного интеграла и его свойства. Экономический смысл определенного интеграла.

Понятие интегральной суммы. Пусть на $[a, b]$ задана функция $y = f(x)$. Разобьем отрезок $[a, b]$ на n элементарных отрезков точками $x_0, x_1, \dots, x_n$: $a=x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n=b$. На каждом отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ разбиения выберем некоторую точку ξ_i и положим $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, где $i=1, 2, \dots, n$. Сумму вида:

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$$

Формула 1

будем называть интегральной суммой для функции $y=f(x)$ на $[a, b]$. Очевидно, что интегральная сумма формулы (1) зависит как от способа разбиения отрезка $[a, b]$ точками $x_0, x_1, \dots, x_n$, так и от выбора точек $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ на каждом из отрезков разбиения $[x_{i-1}, x_i]$, $i=1, 2, \dots, n$.

Понятие определенного интеграла. Для разбиения отрезка $[a, b]$ на части обозначим через $\max \Delta x_i$ максимальную из длин отрезков $[x_{i-1}, x_i]$, где $i=1, 2, \dots, n$.

Определение:

Пусть предел интегральной суммы при стремлении $\max \Delta x_i$ к нулю существует, конечен и не зависит от способа выбора точек $x_1, x_2, \dots$ и точек $\xi_1, \xi_2, \dots$. Тогда этот предел называется определенным интегралом от функции $y=f(x)$ на $[a, b]$, обозначается $\int_a^b f(x)dx$, а сама функция $y=f(x)$ называется интегрируемой на отрезке $[a, b]$, т.е.

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$$

При этом число a – нижний предел, число b – верхний предел, функция $f(x)$ – подынтегральная функция, выражение $f(x)dx$ – подынтегральное выражение, а задача о нахождении $\int_a^b f(x)dx$ – интегрирование функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$.

Свойства определенного интеграла.

– Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла, т.е.

$$\int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx$$

Формула 2

где α – некоторое число.

2. Интеграл от алгебраической суммы двух функций равен такой же сумме интегралов от этих функций, т. е.

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_b^a g(x)dx$$

Формула 3

3. Если отрезок интегрирования разбит на части, то интеграл на всем отрезке равен сумме интегралов для каждой из возникших частей, т.е. при любых a, b, c :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Формула 4

4. Если на отрезке $[a, b]$, где $a < b$, $f(x) \leq g(x)$, то и

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

Формула 5

т. е. обе части неравенства можно почленно интегрировать.

5. *Теорема о среднем.* Если функция $y=f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, (где $a < b$), то найдется такое значение $\xi \in [a, b]$, что

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$$

Формула 6

Экономический смысл интеграла.

Пусть функция $z=f(t)$ описывает изменение производительности некоторого производства с течением времени. Найдём продукции u , произведенной за промежуток времени $[0, T]$.

Отметим, что если производительность не изменяется с течением времени ($f(t)$ – постоянная функция), то объём продукции $\Delta u = f(t)\Delta t$. В общем случае справедливо приближенное равенство $\Delta u = f(\xi)\Delta t$, где $\xi \in [t, t+\Delta t]$, которое оказывается тем более точным, чем меньше Δt .

Разобьём отрезок $[0, T]$ на промежутки времени точками:

$0 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = T$. Для величины объёма продукции Δu_i , произведенной за промежуток времени $[t_{i-1}, t_i]$, имеем $\Delta u_i = f(\xi_i)\Delta t_i$, где $\xi_i \in [t_{i-1}, t_i]$, $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$, $i = 1, 2, \dots, n$. Тогда

$$u \approx \sum_{i=1}^n \Delta u_i = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta t_i$$

При стремлении $\max \Delta t_i$ к нулю каждое из использованных приближенных равенств становится все более точным, поэтому

$$u = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta t_i$$

Учитывая определение определенного интеграла, окончательно получаем

$$u = \int_0^T f(t) dt$$

т. е. если $f(t)$ – производительность труда в момент t , то $\int_0^T f(t) dt$ есть объем выпускаемой продукции за промежуток $[0, T]$.

Методы вычисления определенного интеграла.

Формула Ньютона-Лейбница.

Опираясь на свойства интеграла с переменным верхним пределом, мы получим основную формулу интегрального исчисления, традиционно связываемую с именами И. Ньютона и Г.В. Лейбница.

Теорема:

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, равен приращению первообразной $F(x)$ на этом отрезке, т.е.

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

Формула 7

Нахождение определенных интегралов с использованием формулы Ньютона – Лейбница осуществляется в два шага: на первом шаге, используя технику нахождения неопределенного интеграла, находят некоторую первообразную $F(x)$ для подынтегральной функции $f(x)$; на втором применяется собственно формула Ньютона – Лейбница – находится приращение первообразной, равное искомому интегралу. В связи с этим, введем обозначение для приращения первообразной, которое удобно использовать при записи решений. По определению положим:

$$F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Формула 8

Следует подчеркнуть, что при применении формулы Ньютона – Лейбница (формула 7) можно использовать любую первообразную $F(x)$ для подынтегральной функции $f(x)$, например, имеющую наиболее простой вид при $C=0$.

Пример1:

$$\int_0^1 x^2 dx$$

Произвольная первообразная для функции $f(x)=x^2$ имеет вид $F(x) \int x^n = \frac{x^{n+1}}{n+1} = \frac{x^3}{3} + C$. Для нахождения интеграла по формуле Ньютона – Лейбница возьмем такую первообразную, у которой $C = 0$. Тогда:

$$\int_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3}$$

Пример 2:

$$\int_1^2 2^{3x-4} dx$$

Первообразную подынтегральной функции применяя формулу 7 Ньютона – Лейбница, получаем:

$$\int_1^2 2^{3x-4} dx = \left(\frac{1}{3 \ln 2} 2^{3x-4} \right) \Big|_1^2 = \frac{1}{3 \ln 2} (2^{3 \cdot 2 - 4}) - \frac{1}{3 \ln 2} (2^{3 \cdot 1 - 4}) = \frac{1}{3 \ln 2} \left(4 - \frac{1}{2} \right) = \frac{7}{6 \ln 2}$$

При нахождении интеграла было использовано свойство приращения первообразной:

$$(\alpha F(x)) \Big|_a^b = \alpha \left(F(x) \Big|_a^b \right)$$

где α – некоторое число.

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = -(F(a) - F(b)) = - \int_b^a f(x) dx$$

$$\int_a^a f(x)dx = F(a) - F(a) = 0$$

Таким образом, и при применении формулы Ньютона – Лейбница несущественно, какой из пределов интегрирования больше: верхний или нижний.

Замена переменной и формула интегрирования по частям в определенном интеграле. При вычислении определенных интегралов с использованием формулы Ньютона – Лейбница предпочтительно жестко не разграничивать этапы решения задачи. Такой подход, использующий, в частности, формулы замены переменной и интегрирования по частям для определенного интеграла, обычно позволяет упростить запись решения.

Теорема 1:

Пусть функция $\varphi(t)$ имеет непрерывную производную на отрезке $[a, \beta]$, $a = \varphi(a)$, $b = \varphi(\beta)$ и функция $f(x)$ непрерывна в каждой точке x вида $x = \varphi(t)$, где $t \in [a, \beta]$. Тогда справедливо следующее равенство:

Формула (9), формула замены переменной в определенном интеграле.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

Формула 9

Пример:

$$\int_0^1 x(2-x^2)^5 dx$$

Решение: Положим $t = 2 - x^2$. Тогда $dt = d(2 - x^2) = (2 - x^2)' dx = -2x dx$ и $x dx = -\frac{1}{2} dt$. Если $x=0$, то $t = 2 - 0^2 = 2$, и если $x=1$, то $t = 2 - 1^2 = 1$. Следовательно:

$$\begin{aligned} \int_0^1 x(2-x^2)^5 dx &= \int_2^1 t^5 \left(-\frac{1}{2}\right) dt = -\frac{1}{2} \int_2^1 t^5 dt = -\frac{1}{2} \left(\frac{t^6}{6} \right) \Big|_2^1 = -\frac{1}{12} \left(t^6 \right) \Big|_2^1 = \\ &= -\frac{1}{12} (1 - 2^6) = \frac{21}{4}. \end{aligned}$$

Теорема 2:

Пусть функция $u=u(x)$ и $v=v(x)$ имеют непрерывные производные на отрезке $[a, b]$. Тогда

Формула (10), формула интегрирования по частям для определенного интеграла.

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du,$$

Формула 10

Где $uv \Big|_a^b = u(b)v(b) - u(a)v(a)$.

Пример:

$$\int_0^1 \ln(1+x) dx$$

Решение: Пусть $u = \ln(1+x)$, $dv = dx$. Тогда $du = d(\ln(1+x)) =$

$(\ln(1+x))' dx = \frac{dx}{1+x}$ и $v = \int dv = \int dx = x$. Получаем

$$\int_0^1 \ln(1+x) dx = x \ln(1+x) \Big|_0^1 - \int_0^1 x \frac{dx}{1+x}$$

Для нахождения полученного интеграла положим $t = x + 1$. Тогда $dx = dt$, и если $x = 0$, то $t = 1$, если $x = 1$, то $t = 2$.

Следовательно:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \ln(1+x) dx &= x \ln(1+x) \Big|_0^1 - \int_1^2 \frac{t-1}{t} dt = \ln 2 - \int_1^2 \frac{dt}{t} = \ln 2 - \ln 1 \\ &= \ln 2 - (2 - 1) + \ln 2 - \ln 1 = \ln 4 - 1. \end{aligned}$$

Применение определенного интеграла при моделировании и решении экономических задач.

Рассмотрим примеры использования интегралов в экономике. Если в функции Кобба – Дугласа считать, что затраты труда есть линейная зависимость от времени, а затраты капитала неизменны, то она примет вид $g(t) = (at + \beta)e^{\gamma t}$. Тогда объем выпускаемой продукции за T лет составит:

$$Q = \int_0^T (\alpha t + \beta) e^{\gamma t} dt$$

Формула 11

Пример 1:

Найти объем продукции, произведенной за 4 года, если функция имеет вид $g(t) = (1 + t)e^{3t}$.

Решение:

По формуле (11) объем Q произведенной продукции равен:

$$Q = \int_0^4 (1 + t)e^{3t} dt$$

Используем метод интегрирования по частям. Пусть $u = t + 1, dv = e^{3t} dt$. Тогда $du = dt, v = \int e^{3t} dt = \frac{1}{3}e^{3t}$. Следовательно:

$$Q = (t + 1) \frac{1}{3} e^{3t} \Big|_0^4 - \int_0^4 \frac{1}{3} (5e^{12} - 1) - \frac{1}{9} e^{3t} \Big|_0^4 = \frac{1}{9} (14e^{12} - 2) \approx 2,53 \cdot 10^5$$

Пример 2:

$$K = \int_0^T f(t) e^{-it} dt$$

Формула 12

Определить дисконтированный доход за три года при процентной ставке 8%, если первоначальные капиталовложения составили 10 млн руб., и намечается ежегодно увеличивать капиталовложения на 1 млн руб.

Решение:

Очевидно, что капиталовложения задаются функцией $f(t) = 10 + 1 \cdot t$. Тогда по формуле (12) дисконтированная сумма капиталовложений $K = \int_0^3 (10 + t) e^{-0,08t} dt$.

Интегрируя аналогично (примеру 1), получим $K = 30,5$ млрд руб. Это означает, что для получения одинаковой наращенной суммы через три года ежегодные капиталовложения от 10 до 13 млн руб. при той же, начисляемой непрерывно, процентной ставке.

Пример 3:

$$t_{\text{ср}} = \frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} t(x) dx$$

Формула 13

$$t = ax^{-b}$$

Формула 14

где, a – затраты времени на первое изделие, b – показатель производственного процесса.

Найти среднее время, затраченное освоение одного изделия в период освоения от $x_1 = 100$ до $x_2 = 121$ изделий, полагая по формуле (13) $t = ax^{-b}$, $a = 600$ мин., $b = 0,5$.

Решение:

Используя формулу $t_{\text{ср}} = \frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} t(x) dx$ получаем:

$$t_{\text{ср}} = \frac{1}{121 - 100} \int_{100}^{121} 600x^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{600}{21} 2\sqrt{x} \Big|_{100}^{121} = \frac{400}{7} \approx 57,2 \text{ (мин.)}.$$

Заключение.

При использовании интегрального метода должно соблюдаться условие непрерывной дифференцируемости функции, где в качестве аргумента берется какой-либо экономический коэффициент. Независимо от количества компонентов, которые входят в модель, и кроме того независимо от формы связи между этими составляющими интегральное исчисление определяет совокупный подход к решению моделей разных видов. При его использовании присутствует способ получения более аргументированных результатов исчисления воздействия отдельных факторов, нежели при применении иных способов.

Список литературы

1. Кремер Н.Ш. Высшая математика для экономистов: Учебник для вузов / Н.Ш. Кремер, Б.А. Путко, И.М. Тришин, М.Н. Фридман; Под ред. проф. Н.Ш. Кремера. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Юнити, 2004. – 471 с.
2. Ротова В.А. Математика для экономистов: методические указания для практических занятий: Учебно-методическое пособие / В.А. Ротова, Ю.А. Ушаков, Н.Г. Данилова. – Оренбург: Издательский центр ОГАУ, 2015. – 152 с.