Уразаева Татьяна Альфредовна
канд. экон. наук, заведующая кафедрой
Смирнова Светлана Юрьевна
магистрант
ФГБОУ ВО «Поволжский государственный
технологический университет»
г. Йошкар-Ола, Республика Марий Эл

DOI 10.21661/r-112587

ПРОЦЕССЫ РАВНОМЕРНОГО ПСЕВДОСЛУЧАЙНОГО ПОИСКА ГЛОБАЛЬНОГО ЭКСТРЕМУМА НА СОВРЕМЕННОМ ЭТАПЕ РАЗВИТИЯ СРЕДСТВ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ТЕХНИКИ

***Аннотация**: в данной статье исследовано влияние величины периода датчика псевдослучайных чисел на достижимость результата в алгоритмах случайной оптимизации, показана несостоятельность штатного генератора псевдослучайных чисел Microsoft Office для решения некоторых классов задач случайной оптимизации, а также предложен вариант решения выявленной проблемы.*

***Ключевые слова**: вихрь Мерсенна, гладкая функция, метод Монте-Карло, нелинейное программирование, непрерывная функция, оптимизация, случайный поиск, функция Розенброка, целевая функция, экстремум функции.*

Алгоритмы случайного поиска получили достаточно широкое распространение при решении задач как безусловной, так и условной оптимизации, как при поиске локальных, так и глобальных экстремумов [2; 10]. Их популярность объясняется весьма мягкими требованиями к непрерывности и гладкости функций, а также отсутствием необходимости вычисления производных. Несмотря на определенную критику методов случайного поиска, их использование в условиях роста вычислительной мощности современных компьютеров остается весьма полезным [15]. С другой стороны, решение многих задач и в технике, и в социально-экономической сфере сводится к решению задач оптимизации. Замечая, что в последние годы постановка многих экономико-математических задач стала нелинейной [3; 4; 6; 9; 11; 12], а некоторые функционалы, используемые в этих задачах, разрывны и негладки (например «Value at Risk» при прямых вычислениях [14]), можно говорить о росте интереса к алгоритмам случайного поиска со стороны математической экономики. Задачи негладкой многомерной оптимизации возникают часто и при синтезе некоторых технических систем, например, мультисервисных и/или интеллектуальных вычислительных сетей [1; 8; 13]. Безусловно, этими примерами факты использования случайной оптимизации в технике не исчерпываются.

Учитывая значительные трудности в получении большого потока равномерно распределенных случайных чисел на компьютерах с традиционной архитектурой, мы будем рассматривать случайный поиск, базирующийся на использовании датчиков псевдослучайных чисел (ДПСЧ). Соответственно, настоящая статья посвящена исследованию влияния используемого ДПСЧ на точность вычислений и/или на достижимость результата.

В качестве модельного примера будем решать задачу поиска глобального минимума функции, для которой, во-первых, всегда есть возможность улучшения текущего найденного минимума, и, во-вторых, каждое следующее улучшение по вычислительной трудоемкости выше предыдущего шага, по крайней мере, для исследуемого алгоритма равномерного случайного поиска [10]. (Заметим, что выбор в данном исследовании алгоритма равномерного случайного поиска эквивалентен ситуации полного отсутствия знаний о характере поведения целевой функции.)

Для удовлетворения названных требований была сконструирована функция

$$f(x, y) = \frac{\sin \dfrac{3}{(x-1)^2 + 3(y-1)^2}}{r(x, y) + 100},$$

где $r(x, y) = (1-x)^2 + 100\left(y - x^2\right)^2$ – функция Розенброка [18].

Особенностью функции f является наличие у нее бесконечного, но счетного количества экстремумов, см. рис. 1. При этом очевидно, что глобальный минимум функции f стремится к -0.01.

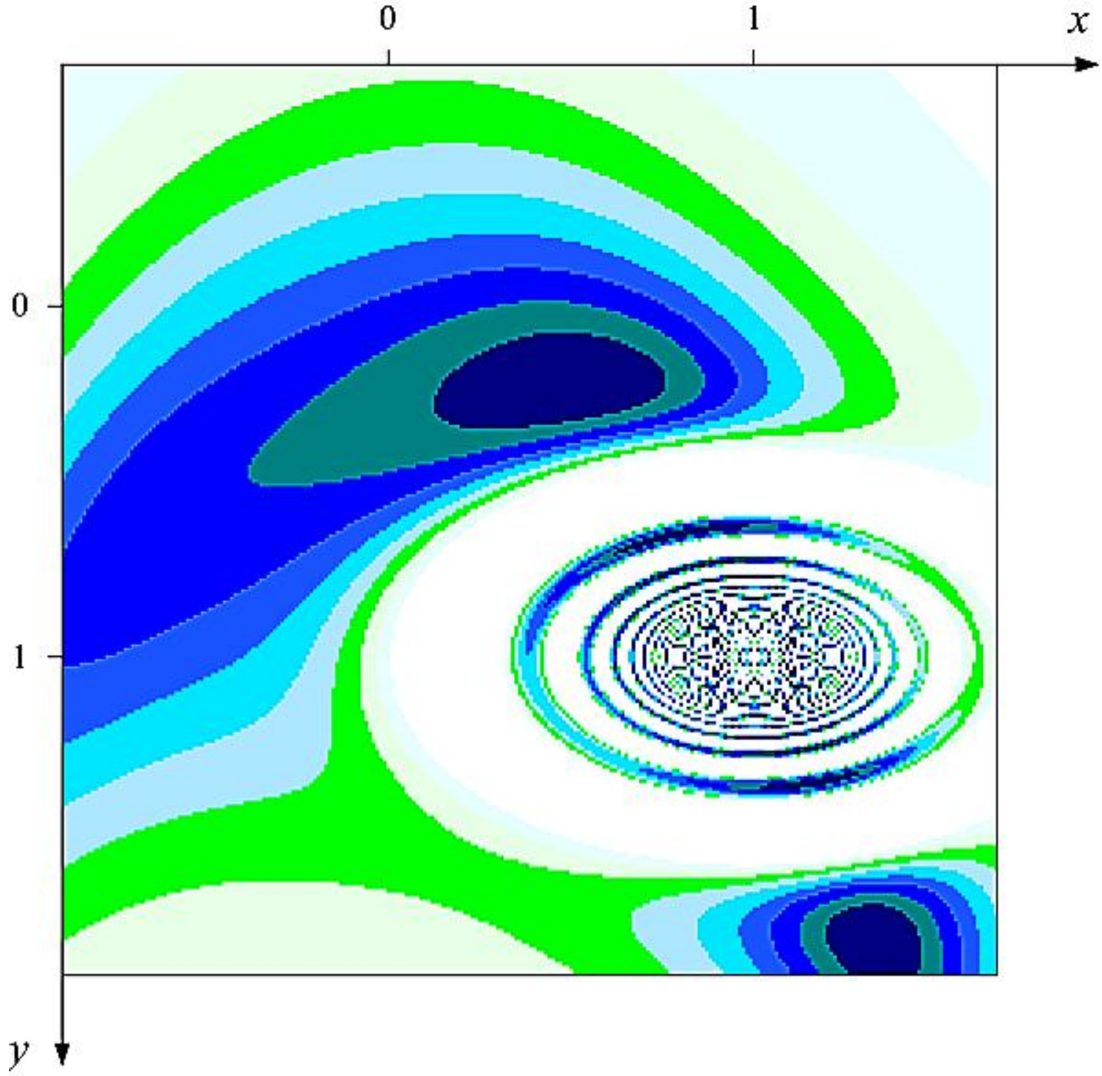

Рис. 1. Визуализация функции f с помощью линий уровня

Сложный характер поведения функции f в окрестности точки (1, 1) демонстрирует рис. 2.

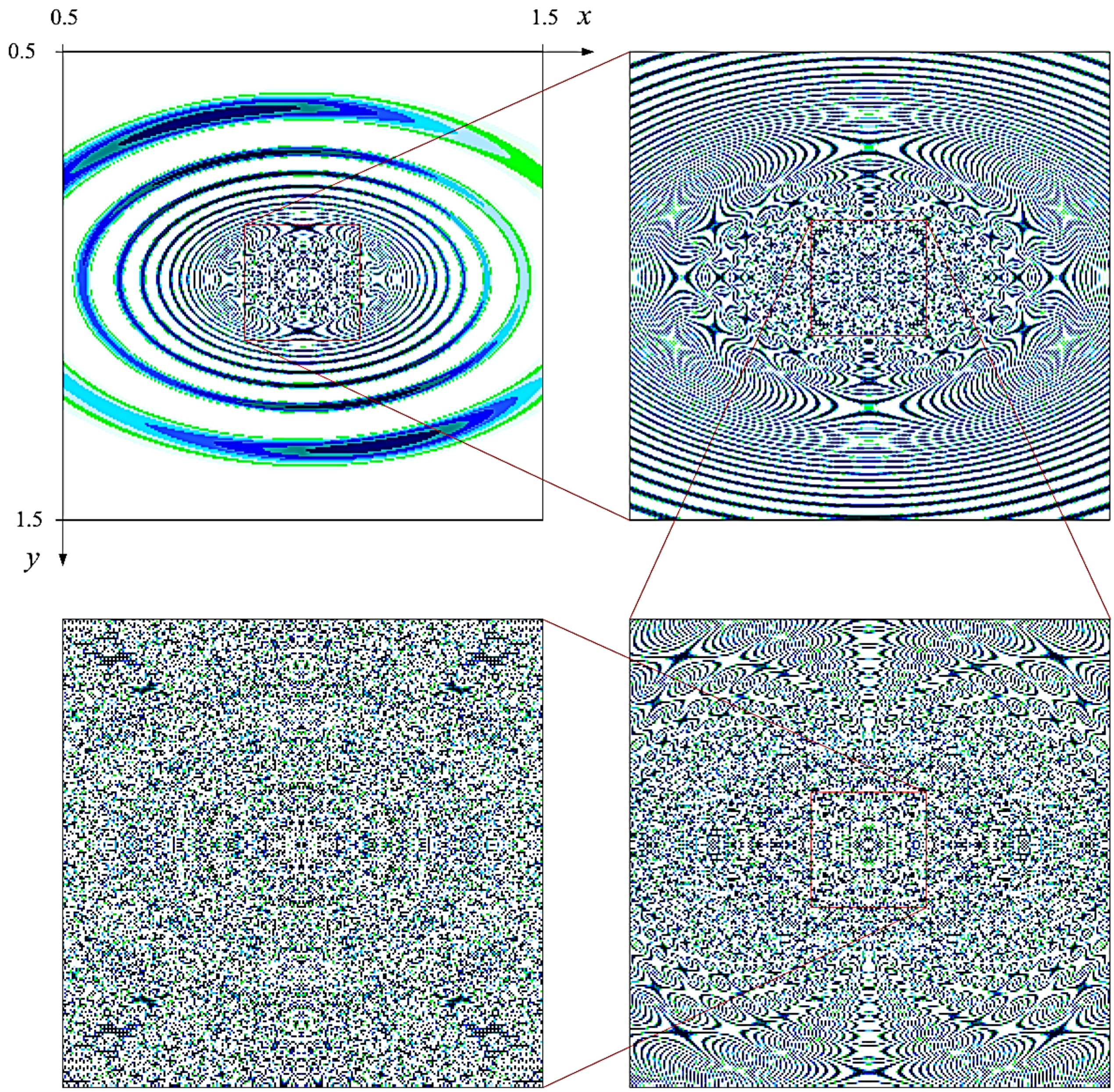

Рис. 2. Линии уровня функции f в окрестности точки (1, 1)
на четырех различных масштабах при фиксированном точечном разрешении

Результаты численных экспериментов приведены на рис. 3. На рисунке k – это количество шагов алгоритма. Группа из пяти траекторий слева, визуализирующих процесс минимизации, соответствует пяти экспериментам, в которых использовался штатный ДПСЧ Microsoft Office (первая группа экспериментов). Некоторые из этих траекторий совпали. Не трудно заметить, что все процессы завершились на одном и том же значении минимума (уровень, помеченный меткой $L0$) при близких значениях счетчика итераций, что странно, учитывая названные особенности минимизируемой функции.

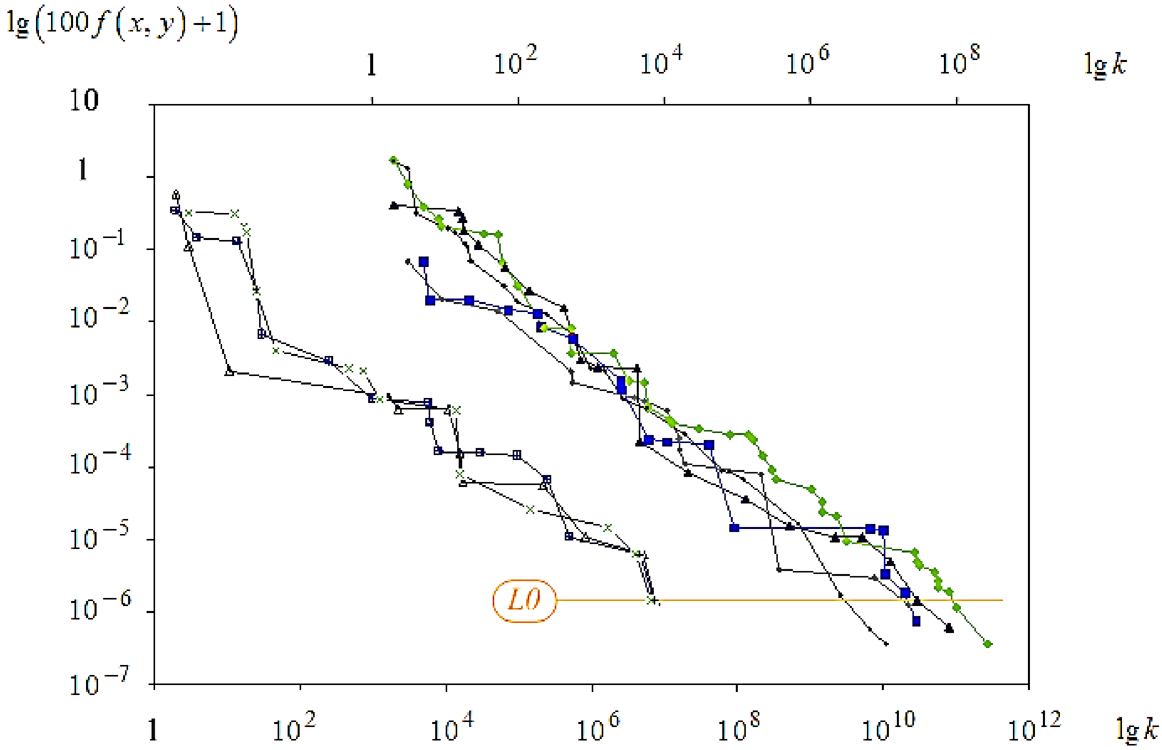

Рис. 3. Процессы минимизации. Левая группа траекторий соответствует использованию стандартного ДПСЧ Microsoft Office (шкала оси абсцисс снизу), правая – использованию датчика MT19937 (шкала оси абсцисс сверху)

Интерпретируем результаты первой группы экспериментов. В работах [5, 7] было показано, что стандартный ДПСЧ Microsoft Office имеет весьма ограниченный период 2^{24} и, во многом, сложности со случайностью битов [7]. Данная ситуация приводит к проблемам использования этого ДПСЧ в методах типа Монте-Карло и, по-видимому, в нашем случае. Необходимо убедится в этом и, по возможности, исправить описанную ситуацию.

В 1997 году японскими математиками Макото Мацумото и Такудзи Нисимурой был предложен ДПСЧ, основанный на свойствах простых чисел Мерсена и в связи с этим получивший название «вихрь Мерсена» [16]. Один из вариантов этого ДПСЧ, называемый MT19937, имеет огромный период, равный числу Мерсенна $2^{19937}-1$, обеспечивает равномерное распределение генерируемых псевдослучайных чисел в 623 измерениях (для лучших известных линейных конгруэнтных генераторов это число измерений не превышает четырех) и может быть относительно эффективно реализован на 32-разрядных компьютерах. Результаты пяти численных экспериментов поиска экстремума с датчиком MT19937, реализованным на VBA [17], представлены группой траекторий справа на рис. 3. Наглядно видна возможность преодоления барьера $L0$.

Подводя итог, можно сказать, что многие математические модели, которые возникают как в естественных, так и в общественных науках, в частности, в экономике, носят нелинейный характер. При исследовании таких моделей достаточно часто используют подходы, основанные на идеях метода Монте-Карло. Современная вычислительная техника позволяет достигнуть здесь числа статистических испытаний 2^{32} и более. Столь значительное количество испытаний потенциально позволяет существенно повысить точность решений, но в ряде случаев может привести к некорректным результатам. В данном исследовании был продемонстрирован еще один механизм возникновения таких некорректных результатов и было показано, что использование новых, длиннопериодических ДПСЧ, например, таких, как MT19937, позволяет избежать проблем подобного рода. При этом важно указать на то, что традиционные, относительно короткопериодические датчики можно с успехом использовать лишь при незначительном количестве статистических испытаний (не более периода ДПСЧ) и/или при отладке.

Список литературы

1. Антонов В.М. Инновационные подходы к развитию техники и технологий. Кн. 1 / В.М. Антонов, А.В. Бородин, Ю.А. Ипатов, А.В. Кревецкий [и др.]. – Одесса: КУПРИЕНКО СВ, 2015. – 172 с.

2. Аоки М. Введение в методы оптимизации / М. Аоки. – М.: Наука, 1977. – 344 с.

3. Бородин А.В. Модель ценообразования на рынке розничных ссудных продуктов коммерческого банка / А.В. Бородин // Экономика. Теория и практика: материалы IV международной научно-практической конференции (17 декабря 2015 г.). – Саратов: Издательство ЦПМ «Академия Бизнеса», 2015. – С. 46–49.

4. Бородин А.В. Об одном подходе к оптимизации инвестиционных и страховых портфелей / А.В. Бородин // Обозрение прикладной и промышленной математики. – 2001. – Т. 8. – В. 1. – С. 110–111.

5. Бородин А.В. Об отдельных аспектах применения методологии Монте-Карло в оценке риска кредитного портфеля в среде Microsoft Office / А.В. Бородин // Экономика. Теория и практика: материалы международной научно-практической конференции (13 августа 2014 г.). – Саратов: Издательство ЦПМ «Академия Бизнеса», 2014. – С. 22–36.

6. Бородин А.В. Оптимизация стоимости владения объектно-ориентированной метасистемой в условиях заданной модели угроз / А.В. Бородин // Обозрение прикладной и промышленной математики. – 2006. – Т. 13. – В. 5. – С. 843–844.

7. Бородин А.В. Реконструкция и исследование датчика псевдослучайных чисел в VBA-подсистеме Microsoft Office / А.В. Бородин // Кибернетика и программирование. – 2014. – №4. – С. 14–45. – DOI: 10.7256/2306–4196.2014.4.12648.

8. Бородин А.В. Технико-экономическое обоснование варианта резервирования сетевой компоненты отказоустойчивой масштабируемой вычислительной системы специального назначения / А.В. Бородин // Кибернетика и программирование. – 2015. – №6. – С. 55–70. – DOI: 10.7256/2306–4196.2015.6.17523.

9. Бородин А.В. Экономические приложения нелинейной оптимизации / А.В. Бородин, Т. А. Уразаева // Пятые Вавиловские чтения. Мировое сообщество и Россия на пути модернизации. Экономика и управление в современном обществе. – Йошкар-Ола: Марийский государственный технический университет, 2002. – С. 280–286.

10. Жиглявский А.А. Методы поиска глобального экстремума / А.А. Жиглявский, А.Г. Жилинскас. – М.: Наука, 1991. – 248 с.

11. Олейникова С.А. Особенности системы имитационного моделирования для задач управления проектами со случайной длительностью выполнения работ // Кибернетика и программирование. – 2015. – №2. – С. 68–77. – DOI: 10.7256/2306–4196.2015.2.14509.

12. Олейникова С.А. Численные методы оптимизации планирования сложных проектов при наличии временных и ресурсных ограничений и обобщенного ресурсного критерия // Программные системы и вычислительные методы. – 2015. – №4. – С. 414–427. – DOI: 10.7256/2305–6061.2015.4.17573.

13. Тарасов В.В. Научные ответы на вызовы современности: техника и технологии. Кн. 1 / В.В. Тарасов, Г.П. Кича, А.В. Куликов [и др.]. – Одесса: КУПРИЕНКО СВ, 2016. – 177 с.

14. Уразаева Т. А. Алгебра рисков / Т.А. Уразаева. – Йошкар-Ола: Поволжский государственный технологический университет, 2013. – 209 с.

15. Химмельблау Д. Прикладное нелинейное программирование / Д. Химмельблау. – М.: Мир, 1975. – 534 с.

16. Matsumoto M. Mersenne twister: a 623-dimensionally equidistributed uniform pseudo-random number generator / M. Matsumoto, T. Nishimura // ACM Transactions on Modeling and Computer Simulation (TOMACS). Special issue on uniform random number generation. – 1998. – Vol. 8. – Iss. 1. – P. 3–30. – DOI:10.1145/272991.272995.

17. Mersenne Twister VBA Class // Directory of Open Source for Quantitative Finance and Trading [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://www.quantcode.com/modules/mydownloads/ singlefile.php?cid=9&lid=610/ (дата обращения: 18.07.2014).

18. Rosenbrock H.H. An automatic method for finding the greatest or least value of a function / H.H. Rosenbrock // The Computer Journal. – 1960. – Vol. 3. – P. 175–184. – DOI: 10.1093/comjnl/3.3.175.