***Бондаренко Татьяна Евгеньевна***
канд. пед. наук, доцент
ФГБОУ ВО «Воронежский государственный
педагогический университет»
г. Воронеж, Воронежская область

*DOI 10.21661/r-112872*

# РАСПОЗНАВАНИЕ В ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКЕ

***Аннотация****: в данной статье автором рассматриваются дидактические и методические аспекты формирования умения распознавать принадлежность объекта объёму понятия в процессе обучения математике в школе.*

***Ключевые слова****: понятие, содержание понятия, объём понятия, структура определения, распознавание.*

Обучение математике включает формирование понятий. Каждое из них характеризуется содержанием и объёмом. Под содержанием понятия понимается набор определяющих его характеристических свойств, а под объёмом – множество всех объектов, обладающих такими свойствами. Содержание понятия раскрывается посредством определения, а объём – посредством классификации. Например, параллелограмм определяется как «четырёхугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны» [2, с. 101]. Его содержание составляют следующие характеристические свойства: 1) четырёхугольник; 2) стороны попарно параллельны. В процессе формирования понятия важно научить школьников отвечать на вопрос, принадлежит ли данный объект объёму понятия. Чтобы ответить на поставленный вопрос, необходимо проверить наличие у исследуемого объекта характеристических свойств, перечисленных в определении, и сделать вывод «свой» или «чужой». При этом вывод существенно зависит от структуры определения. Если его структура конъюнктивная, то объект принадлежит объёму понятия, при условии, что он обладает каждым характеристическим свойством, из указанных в определении. Приведённое выше определение параллелограмма обладает именно такой структурой. Если структура дизъюнктивная, то объект принадлежит объёму понятия, если он обладает хотя бы одним из характеристических свойств, указанных в определении. Например, определение целого числа: «Натуральные числа, противоположные им числа и нуль называются целыми числами» [3, с. 155] имеет дизъюнктивную структуру.

Умственное действие, состоящее в ответе на вопрос, принадлежит ли данный объект объёму понятия, в психолого-педагогической литературе получило название распознавания (Л.М. Фридман) или подведения под понятие (П.Я. Гальперин, Н.Ф. Талызина).

Формирование действия распознавания предполагает выявление характеристических свойств, определяющих данное понятие, и проверку их наличия у объекта, подлежащего распознаванию. В результате проверки делается вывод о его принадлежности или не принадлежности объёму понятия. В основном характеристические свойства понятия выявляются в результате анализа его определения, а вывод существенно зависит от структуры определения.

Например, распознать среди данных на рисунках 1–7 геометрических фигур четырёхугольники – это значит проверить наличие или отсутствие характеристических свойств, приведенных в определении четырёхугольника и сделать вывод о том, является ли данная фигура четырёхугольником.

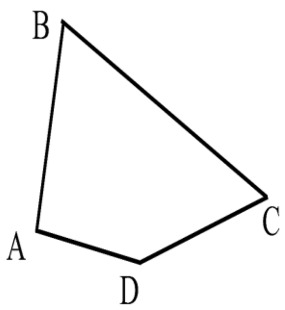

Рис. 1

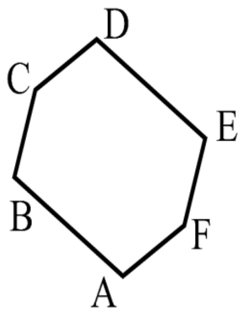

Рис. 2

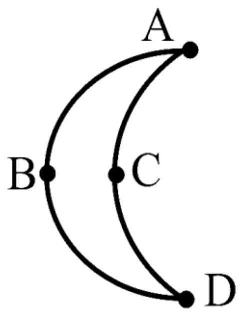

Рис. 3

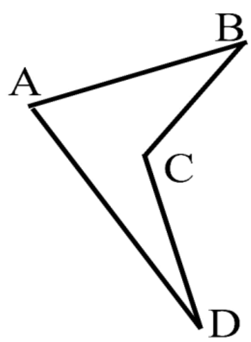

Рис. 4

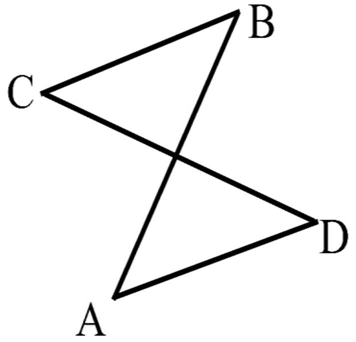


Рис. 5

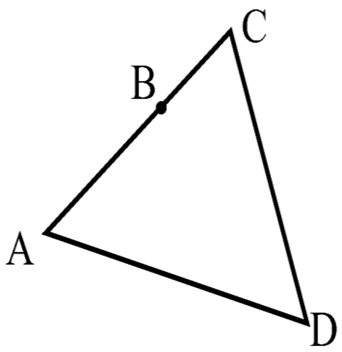


Рис. 6

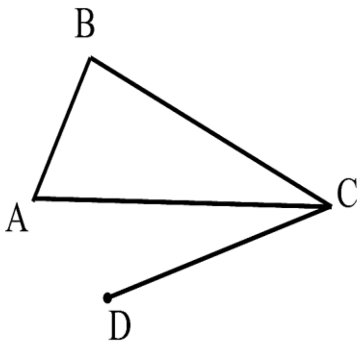


Рис. 7

Приведём определение четырёхугольника из учебника геометрии А.В. Погорелова: «Четырёхугольником называется фигура, которая состоит из четырёх точек и четырёх последовательно соединяющих их отрезков. При этом никакие три из данных точек не должны лежать на одной прямой, а соединяющие их отрезки не должны пересекаться» [4, с. 67].

Перечислим характеристические свойства понятия «четырёхугольник»:

1) наличие 4 точек;

2) никакие 3 точки не принадлежат одной прямой;

3) наличие 4 отрезков;

4) отрезки соединяют 4 точки;

5) отрезки не пересекаются.

Результаты распознавания – проверки приведены в таблице 1. В колонке указаны номера признаков, а в строке – номера рисунков.

Распознавание четырёхугольника

Таблица 1

| | Рис. 1 | Рис. 2 | Рис. 3 | Рис. 4 | Рис. 5 | Рис. 6 | Рис. 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | + | – | – | + | + | + | + |
| 2 | + | + | – | + | + | – | + |
| 3 | + | – | – | + | + | + | + |
| 4 | + | – | – | + | + | + | – |
| 5 | + | + | – | + | – | + | + |

Так как структура определения конъюнктивная, то рассматриваемая фигура является четырёхугольником, если ей присуще каждое характеристическое свойство, указанное в определении. Таким образом, на рисунках 1 и 4 – четырёхугольники.

Ответить на вопрос, какие из чисел $-3{,}5$; $101$, $\frac{5}{7}$; $\sqrt{2}$; $-18$; $0$ являются целыми – это значит проверить (распознать), какие из них – натуральные или им противоположные или 0. Причём число будет целым, если ему присуще хотя бы одно из характеристическое свойство, так как структура определения дизъюнктивная.

Распознавать можно не только по определению, но и по признакам. Например, распознать параллелограмм можно как четырёхугольник, у которого противоположные стороны попарно равны. Средством распознавания перпендикулярности прямых в пространстве служит теорема о трёх перпендикулярах: «Любая прямая на плоскости, перпендикулярная проекции наклонной на эту плоскость, перпендикулярна и наклонной», а также обратная ей теорема [4, с. 62]. По сути они выражают признак перпендикулярности прямых. Умение распознавать способствует успешному решению некоторых задач. Приведём пример такой задачи: «В основании пирамиды лежит прямоугольник, её боковое ребро перпендикулярно плоскости основания. Можно ли утверждать, что все боковые грани такой пирамиды – прямоугольные треугольники?».

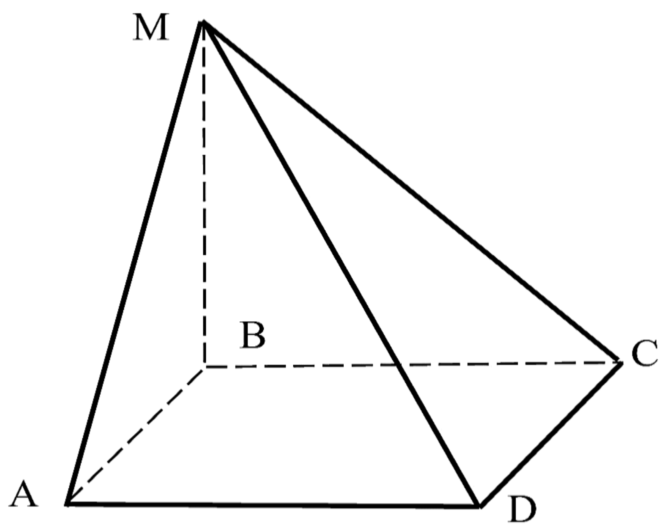


Рис. 8

Решение задачи включает распознавание прямоугольных треугольников AMD и CMD. Средством распознавания служит теорема о трёх перпендикулярах, применение которой предполагает проверку существенных свойств перпендикулярности прямых:

1. Является ли прямая AM наклонной к плоскости (ABC)?

2. Является ли прямая AB проекцией наклонной AM на плоскость (ABC)?

3. Перпендикулярна ли прямая AD проекции AB?

Вывод: треугольник AMD – прямоугольный.

Формирование умения распознавать (подводить под понятие) играет важную роль в процессе обучения математике, так как в результате принадлежности объекта объёму понятия может быть задействовано всё разнообразие свойств и признаков, присущих понятию. Однако в действующих учебниках и в практике обучения этому уделяется недостаточно внимания. Поэтому возникает ситуация, состоящая в том, что учащийся, зная какое-то определение, свойство, правило, не видит возможности их применения. Например, не распознав прямоугольные треугольники в приведённой выше задаче, он не сможет посчитать площадь боковой поверхности пирамиды. Следовательно, при изучении различных разделов математики необходимо уделять внимание целенаправленному формированию умения распознавать.

Покажем, как может быть организовано формирование такого умения при изучении тождественных преобразований целых выражений в курсе алгебры 7 класса. В качестве примера выберем преобразование вынесения общего множителя за скобки.

Результаты проведенного теоретического и экспериментального исследования показали, что прежде, чем учить школьников применять правило преобразования, им следует представить те выражения (первоначально простейшие), которые могут быть преобразованы посредством этого правила, и научить их распознавать такие выражения.

С этой целью при изучении вынесения общего множителя за скобки учащимся первоначально предлагается рассмотреть выражения, представляющие собой алгебраическую сумму, слагаемые которой – произведения, имеющие общий множитель. Примерами таких выражений могут служить:

$$7x + 7y;\; x^2y - 2ax^2;\; 0{,}4 \cdot 0{,}8 + 0{,}4 \cdot 0{,}2;\; x(a-b) + y(a-b).$$

Далее учащимся сообщается, что для вынесения общего множителя за скобки перечисленные особенности выражения называют условиями выполнимости преобразования, а выражения, удовлетворяющие этим условиям, – выражениями *приведенного вида*.

Условимся выражения приведенного вида изображать схематически на основании следующих соглашений.

С помощью схемы $\square + \square + \dots + \square$, в каждый контур которой может быть вписан любой одночлен (число), будем изображать многочлены. Тогда выражения, удовлетворяющие условиям выполнимости вынесения общего множителя за скобки, могут быть изображены посредством схемы:

$$\blacksquare \cdot \square + \blacksquare \cdot \square + \ldots + \blacksquare \cdot \square$$

где с помощью единообразной штриховки (лучше закраски) показано, что контуры схемы следует «заполнять» одинаковым образом. Отметим, что иногда контур схемы может содержать и многочлен. Например, в случае выражения *x (a + c) + y (a + c)*.

Использование таких схем направлено на формирование обобщенного образа выражения приведенного вида независимо от того является оно числовым или содержит переменные, что способствует переносу умения выполнять тождественные преобразования буквенных выражений на числовые.

Условия выполнимости преобразования и схема выражения приведенного вида выписываются на дидактическую карточку 1 (таблица 2).

Таблица 2

Дидактическая карточка 1

| Вынесение общего множителя за скобки |
| --- |
| Условия выполнимости преобразования:<br>1. Выражение является алгебраической суммой.<br>2. Слагаемые – произведения.<br>3. Произведения содержат общий множитель.<br>Схема: $\blacksquare \cdot \square + \blacksquare \cdot \square + \dots + \blacksquare \cdot \square$<br>Замечание. Заштрихованный контур, обозначающий общий множитель, может располагаться в произведении на любом месте. |

Перечисленные условия выполнимости преобразования позволяют распознавать выражения приведенного вида.

Учащимся сообщается, что распознать выражение приведенного вида – это значит проверить наличие каждого из условий, перечисленных в карточке, и сделать вывод. Для формирования умения распознавать выражения приведенного вида предлагаются следующие упражнения.

№*1*. Какие из данных выражений удовлетворяют условиям выполнимости преобразования:

1) $0{,}5a+0{,}5в$; 3) $\frac{5}{8}\cdot 7+\frac{1}{7}\cdot\frac{3}{8}$; 5) $1{,}2a^2\cdot 1{,}2в^2$;

2) $0{,}8\cdot\frac{1}{3}+0{,}2\cdot\frac{1}{3}$; 4) $0{,}7x^2-0{,}2x^2y$; 6) $6{,}3\cdot 0{,}4+6{,}3:0{,}4$?

№*2*. Проверьте, что выражения $(a+в)\cdot x+(a+в)\cdot y$ и $0{,}4\cdot 1{,}8+0{,}4\cdot 1{,}2$ являются выражениями приведенного вида, а выражения $a-2y$ и $6\cdot\frac{1}{7}+\frac{1}{6}\cdot 7$ не являются такими выражениями.

№*3*. Приведите примеры двух выражений (числового и содержащего переменные), которые удовлетворяют условиям выполнимости преобразования.

№*4*. Укажите номера выражений приведенного вида:

1) $\frac{3}{5}x+0{,}6y$; 4) $4x^2:3{,}2x^2$; 7) $1{,}6\cdot 1{,}8+1{,}6\cdot 8{,}1$;

2) $2a+\frac{a}{2}$; 5) $2a^2-в^2$; 8) $a^2\cdot(x+y)+a^2\cdot(x-y)$;

3) $ay^2 - xy^2$; 6) $x^2 - 2xy + y^2$; 9) $(1{,}3 - 0{,}8) \cdot 1{,}4 + (1{,}3 - 0{,}8) \cdot 3{,}6$.

№*5*. Заполните пропуски таким образом, чтобы полученные выражения удовлетворяли условиям выполнимости вынесения общего множителя за скобки:

1) $3a \ldots 3b$; 2) $0{,}2x + \ldots y$; 3) …· 0,8 + 1,2 ·… ; 4) $(x+1)\ldots 3 + \ldots \cdot 0{,}4$.

В связи с тем, что вынесением общего множителя за скобки преобразуются не только выражения приведённого вида, но и выражения, представимые в таком виде, следует научить школьников их распознавать. К этому моменту учащиеся умеют преобразовывать выражения, представимые в приведённом виде. Обобщая имеющийся опыт, выявляем особенности таких выражений и составляем дидактическую карточку 2 (таблица 3).

Таблица 3

Дидактическая карточка 2

| Вынесение общего множителя за скобки |
|---|
| Условия, при которых выражение представимо в приведенном виде.<br>Выражение является алгебраической суммой, слагаемые которой содержат:<br>1) коэффициенты, имеющие наибольший общий делитель, отличный от 1;<br>2) степени с одним и тем же основанием;<br>3) степени противоположных двучленов. |

Распознавая выражения, представимые в приведённом виде, учащиеся проверяют у них наличие перечисленных условий и делают вывод. Причем, вывод о представимости выражения в приведенном виде делается при выполнении хотя бы одного из условий, перечисленных в карточке.

Формирование умения распознавать выражения, представимые в приведённом виде, может осуществляться посредством следующих упражнений.

№*1*. Какие из выражений могут быть представлены в приведенном виде:

1) $9a + 18в - 27c$; 3) $11p^3 - 66$; 5) $12x - 3y + 4z$;

2) $5x^2 - 7y^2$; 4) $2x - 3y + 4z$; 6) $10000a + 10001c$?

№*2*. Какие из чисел 5, 7, 15, 18,42 могут быть вписаны вместо многоточия в выражение … $x$ – … $y$, чтобы стало возможным вынесение за скобки числового множителя, отличного от 1?

№*3*. Приведите примеры выражений, у которых может быть вынесен за скобки числовой множитель.

№*4*. Какие из следующих выражений могут быть представлены в приведенном в приведенном виде:

1) $x^2y^4+x^3$; 4) $3^2+3^4-3^6$; 7) $(ac)^4-2(ac)^3$;

2) $a^2b^2-a^2-b^2$; 5) $2^3+3^3+5^3$; 8) $(x+y)^2+2(x+y)$;

3) $m^2+n^2+h^2$; 6) $2^3\cdot 3^2+3^3\cdot 2^2$; 9) $(x+y)^2+2x+y$?

№*5*. Заполните пропуски таким образом, чтобы стало возможно вынесение общего множителя за скобки:

1) $x^2 \ldots x^3 \ldots x^5$; 2) $\ldots + y^2 - \ldots$; 3) $5^2 \ldots 5^6 - \ldots$; 4) $3^{n+1}+\ldots$.

№*6*. Составьте суммы степеней, допускающую вынесение общего множителя за скобки.

№*7*. В каких из следующих выражений может быть вынесен за скобки множитель – степень двучлена:

1) $2(a-c)^3+(c-a)^2$; 4) $(a-3y)^2-2x(y-3a)$;

2) $a(1-x)^2-b(1+x)^2$; 5) $0{,}8\cdot(2{,}6+1{,}2)+1{,}3\cdot(2{,}6-1{,}2)$

3) $a(-1-x)^2+(1+x)$; 6) $0{,}8\cdot(2{,}6-1{,}2)+1{,}3\cdot(1{,}2-2{,}6)$?

№*8*. Заполните пропуски таким образом, чтобы стало возможным вынесение за скобки множителя – двучлена:

1) $(x-a)^3-2(\ldots)^2+(\ldots)$; 2) $0{,}7\cdot(3{,}2-2{,}8)\ldots 1{,}3\cdot(2{,}8-3{,}2)^2$.

№*9*. Приведите примеры выражений, в которых может быть вынесен за скобки множитель – степень двучлена.

№*10*. Укажите номера тех выражений, которые могут быть преобразованы вынесением общего множителя за скобки:

1) $48x^2+36y^2-18xy$; 7) $2^{11}+3^{11}-5^{11}$;

2) $13a^3-26a^2+130a$; 8) $x(a-1)^3+y(a-1)^2+z(a-1)$;

3) $7m-8n+9p$; 9) $x(a-1)^3+y(a+1)^2+z(a-1)$;

4) $(0{,}8y)^3-3a(0{,}8y)^2$; 10) $a^2+(a+1)^2+(a+2)^2$;

5) $x^3-3x^2y+3xy^2-y^3$; 11) $2^a+2^{a+1}+2^{a+2}$;

6) $11^2+11^4-11^8$; 12) $5^3\cdot7^2-7^2\cdot5^2+7^{3\cdot}\cdot5^2$.

Аналогичным образом распознавание выражений приведённого вида и выражений, представимых в таком виде, может быть методически организовано и при изучении других преобразований.

Сформированность умения распознавать позволит учащемуся применить весь арсенал полученных знаний и умений по отношению к любому имеющемуся объекту: геометрической фигуре, алгебраическому выражению, функции, уравнению.

***Список литературы***

1. Бондаренко Т.Е. Тождественные преобразования как средство рационализации вычислений: Учебно-методическое пособие / Т.Е. Бондаренко // LAP LAMBERT Academic Publishing. – 2015. – 139 с.

2. Геометрия, 7–9: Учебник для общеобразоват. учреждений / Л.С. Атанасян [и др.]. – 2 изд. – М.: Просвещение, 2014. – 383 с.

3. Математика, 6 кл.: Учебник для общеобразоват. учреждений / Н.Я. Виленкин [и др.]. – 33-е изд. – М.: Мнемозина, 2015. – 288 с.

4. Погорелов А.В. Геометрия. 7–9 классы: Учебник для общеобразоват. учреждений / А.В. Погорелов. – 13-е изд. – М.: Просвещение, 2012. – 224 с.

5. Тождественные преобразования в школьном курсе алгебры [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://samzan.ru/79527 (дата обращения: 10.08.2016).