Седакова Валентина Ивановна
канд. пед. наук, доцент
Ефимова Александра Алексеевна
студентка
БУ ВО «Сургутский государственный
педагогический университет»
г. Сургут, ХМАО – Югра

ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЕ ТОЧКИ И ЛИНИИ В ТРЕУГОЛЬНИКАХ

***Аннотация**: решение геометрических задач всегда вызывает затруднения у учащихся. Действенную помощь в нахождении элементов в треугольнике смогут оказать сведения об особых точках и линиях в треугольниках, которые стали называть замечательными точками. Представленный материал позволит формировать у учащихся метапредметные универсальные действия при решении геометрических задач.*

***Ключевые слова**: замечательные точки треугольника, универсальные учебные действия, методы решения задач.*

В процессе изучения геометрического материала одной из часто встречающихся геометрических фигур является треугольник. Казалось бы, что о треугольниках известно все: классификация, свойство углов и сторон, формулы для вычисления площадей, радиусы вписанных и описанных окружностей и т. п. Действительно, геометрия начинается с треугольника, так сложилось исторически и уже два с половиной тысячелетия эта фигура является настоящим символом геометрии; но он не столько символ, сколько -атом геометрии [5].

Его так можно назвать потому, что предшествующие ему понятия – такие как точка, прямая и угол – это неясная и неосязаемая абстракция вместе со связанным с ней набором теорем и задач. Удивительно то, что треугольник и до наших дней является неисчерпаемым объектом изучения, даже несмотря на всю свою кажущуюся простоту. Даже сегодня никто не осмелится сказать, что знает все его свойства.

Именно поэтому в современном мире школьная геометрия может стать интересней и гораздо содержательней, когда в ней начинается изучение треугольника на глубоком и всестороннем уровне.

Ввиду многообразия треугольника как объекта изучения – а, значит, и источника различных методик его изучения – можно подбирать и разрабатывать материал для изучения геометрии *замечательных точек треугольника*. А при подборе такого материала нельзя ограничиваться лишь замечательными точками и линиями, которые предусмотрены в школьной программе Федеральным государственным образовательным стандартом (ФГОС).

В рамках школьной программы по геометрии идёт рассмотрение только малой части замечательных точек и линий треугольника – это:

– точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника (центр описанной окружности);

– точка пересечения биссектрис центр вписанной окружности – (инцентр);

– точка пересечения медиан;

– точка пересечения высот треугольника – ортоцентр.

Есть еще ряд утверждений, связанных с вершинами треугольника и замечательными точками треугольника, например, если две из замечательных точек треугольника совпадают, то треугольник равносторонний; если вершина треугольника и две замечательные точки принадлежат одной прямой, то треугольник равнобедренный.

Изучение данной темы начинается в 8 классе, в учебнике Л.С. Атанасяна предлагаются следующие задачи на данную тему [2]:

Задача 1. Из точки M биссектрисы неразвернутого угла O проведены перпендикуляры MA и MB к сторонам этого угла. Докажите, что $AB \perp OM$.

Даная задача демонстрирует связь свойств биссектрисы угла и высот треугольника.

Задача 2. Высоты AA_1 и BB_1 равнобедренного треугольника ABC, проведенные к боковым сторонам, пересекаются в точке M. Докажите, что прямая MC – серединный перпендикуляр к отрезку AB.

В данной задаче присутствуют сразу две замечательные точки – точка пересечения серединных перпендикуляров и точка пересечения высот. Пользуясь теоремой о пересечении высот учащиеся смогут решить задачу.

Задача 3. Докажите, что если в треугольнике *ABC* стороны *AB* и *AC* не равны, то медиана *AM* треугольника не является высотой.

В задаче присутствует одна замечательная точка – точка пересечения медиан. Данную задачу ученики могут решить «методом от противного», т.е. представить, что медиана *AM* – высота, а дальше, пользуясь теоремой о серединном перпендикуляре, решить задачу.

Задача 4. Даны угол и отрезок. Постройте точку, лежащую внутри данного угла, равноудаленную от его сторон и равноудаленную от концов данного отрезка.

Эта задача на построение, ученики должны не только находить то, что требуется в задаче, но и уметь выполнять построения. Им необходимо построить биссектрису заданного угла и серединный перпендикуляр к данному отрезку, так они получат искомую точку.

В ходе дальнейшего изучения геометрического материала можно предложить учащимся задачи посложнее или задачи с нестандартным решением. Но все задания учебного материала ориентированы на достижение личностных результатов, в них предлагается найти и обосновать его решение, опираясь только на факты.

А работа с математическим содержанием учит уважать и принимать чужое мнение, если оно обоснованно. При решении геометрических текстовых задач наиболее эффективно происходит формирование регулятивных и познавательных УУД.

Для развития регулятивных УУД наиболее эффективными заданиями будут являться текстовые задачи, так как работа с ними полностью отражает алгоритм работы по достижению поставленной цели. Формирование познавательных УУД будет формироваться, как вариант, через поиск разных способов решения задач, формулировать несложные выводы на основе прочитанного текста, сравнивать информацию.

Спрашивается, может быть этого материала достаточно, чтобы выполнять нужные подсчеты в треугольниках?

Если говорить об обязательных минимальных знаниях в области геометрии в целом, то этого, возможно, и достаточно. Но если речь идет о внедрении в образовательный процесс ФГОС, нацеленных на формирование исследовательских качеств, развитие способностей самостоятельно добывать и применять информацию, то этого недостаточно.

Действительно, с введением стандартов второго поколения особую значимость приобретает развитие исследовательских умений учащихся, формирование и поддержание интереса к обучению.

Многие ученые – методисты связывают исследовательскую деятельность учащихся при обучении геометрии с решением исследовательских задач, либо с дополнительной работой над задачей [3; 8].

В.А. Сластенин определяет сущность исследовательского метода как «способ организации поисковой, творческой деятельности учащихся по решению новых для них проблем». Исследовательский метод предполагает самостоятельное решение познавательной задачи, подбор необходимых методов решения под руководством учителя. В процессе исследовательской деятельности наиболее полно проявляются инициатива, самостоятельность и творчество [6].

В этом плане особый интерес вызывают задачи, которые предлагаются при решении итоговой аттестации учащихся в виде тестовых заданий (ОГЭ и ЕГЭ).

Рассмотрим несколько таких задач.

Задача 5. Катеты прямоугольного треугольника равны 9, 12 и гипотенуза равна 15. Найдите расстояние между точкой пересечения биссектрис и точкой пересечения медиан [1].

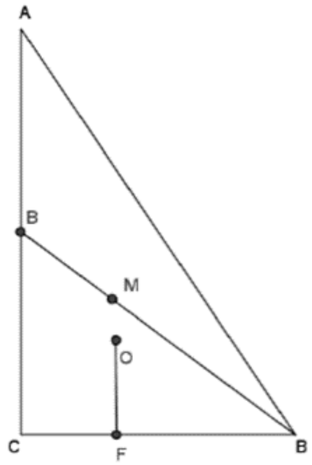

Рис. 1

Решение

M – точка пересечения медиан, *O* – центр точка пересечения биссектрис и центр вписанной окружности (рис.1). Выразим его:

$$r = \frac{1}{2}(a+b-c) = \frac{1}{2}(9+12-15) = 3.$$

OF = 3, *CF* = 3, *BF : BC* = 2:3, но и *BM* : BB_1 = 2 : 3, значит точка *M* принадлежит прямой *OF*, которая параллельная B_1C. Из подобия треугольников BB_1C и *BOF* имеем:

$$\frac{BF}{DC} = \frac{MF}{B_1C}, \ \frac{6}{9} = \frac{OF}{6}, \ MF = 4, OF = 3, MO = 1.$$

Ответ: 1.

Задача 6. В треугольнике *ABC* медиана *AK* пересекает медиану *BD* в точке *L*. Найдите площадь треугольника *ABC*, если площадь четырехугольника *KCDL* равна 5 [4].

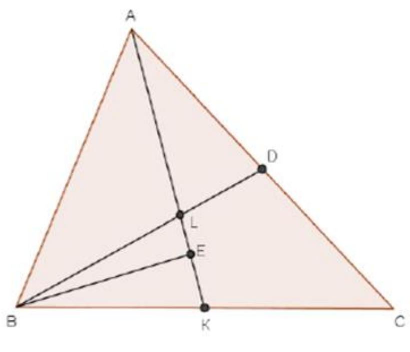

Рис. 2

Решение

Медианы треугольника делятся точкой пересечения в отношении 2:1, считая от вершины, поэтому $KL = \frac{1}{3}AK$. Поскольку у треугольников *BKL* и *BKA* общая высота (отношение площадей треугольников с

равными высотами равно отношению их оснований), проведенная из вершины *B*, то

$$S_{BKL} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} S_{ABC} = \frac{1}{6} S_{ABC}.$$

Поскольку $S_{BKL} = S_{BDC} - S_{KCDL}$ и $S_{BDC} = \frac{1}{2} S_{ABC}$, получаем уравнение

$$\frac{1}{6} S_{ABC} = \frac{1}{2} S_{ABC} - 5,$$

откуда находим, что $S_{ABC} = 3 \cdot 5 = 15.$

Ответ: 15.

Задача 7. Через точку пересечения медиан треугольника *ABC* проходит прямая, пересекающая стороны *AB* и *AC*. Расстояния от вершин *B* и *C* до этой прямой равны *b* и *c* соответственно. Найдите расстояние от вершины *A* до этой прямой [7].

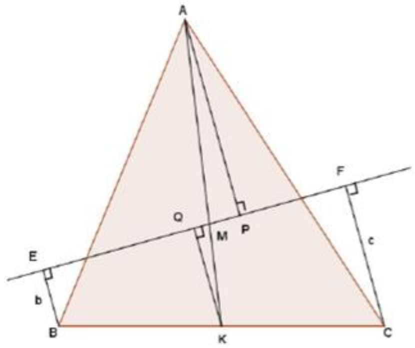

Рис. 3

Решение

Пусть точка *M* – точка пересечения медиан треугольника *ABC* (рис. 3); *K* – середина стороны *BC; E, P, Q* и *F* – проекции точек соответственно *B, A, K* и *C* на данную прямую. Поскольку *AK* – медиана треугольника *ABC*, а *M* – точка пересечения.

медиан этого треугольника, то $AM : MK = 2:1$.

KQ – средняя линия прямоугольной трапеции $BEFC$ (или прямоугольника, если $b = c$).

Поэтому $KQ = \frac{BE + CF}{2} = \frac{b + c}{2}$.

Из подобия прямоугольных треугольников KQM и APM следует, что

$$AP = KQ \cdot \frac{AM}{KM} = \frac{b + c}{2} \cdot 2 = b + c.$$

Ответ: $b+c$.

Определенный интерес представляют другие замечательные точки и линии, которые названы в честь ученых-математиков. Вот некоторые из них:

1. *Прямая Эйлера* (швейцарский, немецкий и российский *математик* и *механик*) определена как прямая, проходящая через центр описанной окружности и ортоцентр треугольника.

2. *Точка Жергонна* (Жозеф Диас Жергонн французский *математик* и геометр) – точка пересечения отрезков, соединяющих вершины треугольника с точками касания противоположных сторон вписанной окружностью.

3. *Прямая Симпсона* (Томас Симпсон – *английский математик*). Основания перпендикуляров, опущенных из точки P описанной окружности треугольника ABC на его стороны или их продолжения, лежат на одной прямой.

Использование таких точек возможно на дополнительных занятиях с учащимися, проявляющими повышенный интерес с геометрии, которые готовятся к сдаче математики профильного уровня. Такие задачи способствуют формированию исследовательских навыков, повышают интерес к математике.

Список литературы

1. Вольфсон Б.И. Подготовка к ЕГЭ и ГИА-9: учимся решать задачи / Б.И. Вольфсон, Л.И. Резницкий. – Легион, 2011. – 129 с.

2. Геометрия 7–9 классы: Учеб. для общеобразоват. организаций с прил. на электрон. носителе / Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев [и др.]. – 4-е изд. – М.: Просвещение, 2015. – 383 с.

3. Голунова А.А. Обучение математике в профильных классах: Учеб.-метод. пособие / А.А. Голунова. – 2-е изд., стер. – Флинта, 2014. – 204 с.

4. ЕГЭ 2014. Математика. 30 вариантов типовых тестовых заданий и 809 заданий части 2 (С) / И.Р. Высоцкий, П.И. Захаров, В.С. Панферов, С.И. Посицельский, А.В. Семенов, А.Л. Семенов, М.А. Семенов, И.Н. Сергеев, В.А. Смирнов, С.А. Шестаков, Д.Э. Шноль, И.В. Ященко; под ред. А.Л. Семенова, И.В. Ященко. – М.: Экзамен. 2014. – 215 с.

5. Коксетер Г.С. Новые встречи с геометрией / Г.С. Коксетер, С.Л. Грейтцер. – М.: Наука, 1978. – 128 с.

6. Педагогика: Учеб. пособие для студ. высш. пед. учеб. заведений / В.А. Сластенин, И.Ф. Исаев, Е.Н. Шиянов; под ред. В.А. Сластенина. – М.: Академия, 2002. – 576 с.

7. Семенова А.В. ЕГЭ – 2012. Математика: типовые экзаменационные варианты: 30 вариантов / Под редакцией А.В. Семенова, И.В. Ященко. – М.: Национальное образование, 2011. – 192 с.

8. Сорокин Н.Н. Развитие исследовательских умений по геометрии [Текст] / Н.Н. Сорокин // Математика в школе. – 2014. – №8. – С. 17–19.