Бородин Андрей Викторович
канд. экон. наук, доцент, заведующий кафедрой
ФГБОУ ВО «Поволжский государственный
технологический университет»
г. Йошкар-Ола, Республика Марий Эл

DOI 10.21661/r-112917

СТРОЕНИЕ МНОЖЕСТВА РИСКОВ НАД ПОЛЕМ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

Аннотация*: статья посвящена развитию абстрактной теории риска. В частности, с теоретико-множественной точки зрения исследовано строение множества рисков, с позиций математической теории энтропии исследованы компоненты разбиения пространства рисков.*

Ключевые слова*: алгебраическая теория риска, вероятностная неопределенность, дискретная система, коммутативный моноид, риск, сложность, состояние системы, энтропия.*

В монографии [8] был предложен максимально общий формализм, позволяющий, с одной стороны, проследить пути генезиса риска, как феномена сознания, а с другой, сформировать новые, более эффективные, подходы к решению вычислительных задач теории риска дискретных систем в условиях вероятностной неопределенности. Этот формализм получил название «алгебраическая теория риска» (АТР).

Практика подтвердила плодотворность использования идей АТР, как в социально-экономической сфере (финансовые приложения [6; 7; 9], задачи управления персоналом [1; 2]), так и при исследовании технических систем [3; 4; 10].

Важнейшими абстракциями АТР являются понятия риска, множества рисков и алгебраической операции умножения рисков, интерпретируемой в терминах предметной области как операция вычисления совместного риска.

Риски в АТР представляются мультимножествами, носитель которых – суть подмножество прямого произведения $C\times\mathbb{I}$, где множество всех отображений состояния системы на себя C вместе с операцией композиции этих отображений образуют коммутативный моноид, а $\mathbb{I}=[0,1]\subset\mathbb{R}$ – единичный отрезок, где $\mathbb{R}$ – множество действительных чисел. Соответственно множество рисков представляет из себя множество мультимножеств вида

$$\mathfrak{R}=\left\{\boldsymbol{R}:\ \boldsymbol{R}\in\mathfrak{A},\ \Sigma_{x\in\operatorname{Supp}\boldsymbol{R}}\,k_{\boldsymbol{R}}(x)\operatorname{pr}_{\mathbb{I}}x=1\right\},$$

где $\mathfrak{A}=\left\{\boldsymbol{A}:\ \operatorname{Supp}\boldsymbol{A}\subset C\times\mathbb{I}\right\}$,

$\operatorname{Supp}\boldsymbol{A}$ – носитель мультимножества $\boldsymbol{A}$,

$k_{\boldsymbol{R}}(x)$ – кратность элемента x в мультимножестве $\boldsymbol{R}$,

$\operatorname{pr}_{\mathbb{I}}x$ – проекция элемента x на множество $\mathbb{I}$.

Таким образом, очевидно, что $\mathfrak{R}$ – это множество всех возможных дискретных вероятностных распределений над C, иначе, множество всех возможных распределений вариантов развития дискретной системы.

Над $\mathfrak{R}$ можно определить операцию умножения (вычисления совместного риска):

$$\boldsymbol{A}\bullet\boldsymbol{B}\underset{Def}{=}\left\{k_{\boldsymbol{A}\bullet\boldsymbol{B}}(u)*u:\ k_{\boldsymbol{A}\bullet\boldsymbol{B}}(u)=\sum_{\substack{x\in\operatorname{Supp}\boldsymbol{A},\\ y\in\operatorname{Supp}\boldsymbol{B},\\ xy=u}}k_{\boldsymbol{A}}(x)\,k_{\boldsymbol{B}}(y),\ u\in\bigcup_{\substack{x\in\operatorname{Supp}\boldsymbol{A},\\ y\in\operatorname{Supp}\boldsymbol{B}}}\{xy\}\right\}.$$

Здесь произведение элементов определено следующим образом:

$$z=x\bullet y\underset{Def}{\Leftrightarrow}\operatorname{pr}_C z=\operatorname{pr}_C y\circ\operatorname{pr}_C x,\ \operatorname{pr}_{\mathbb{I}}z=\operatorname{pr}_{\mathbb{I}}x\cdot\operatorname{pr}_{\mathbb{I}}y.$$

В монографии [8] доказано, что алгебра $\left\langle \mathfrak{R}, \bullet \right\rangle$ – коммутативный моноид. Использование этого факта, а также развитие соответствующей теории, позволило разработать ряд новых, более эффективных, алгоритмов анализа риска.

В то же время за пределами исследования [8] остался вопрос строения множества $\mathfrak{R}$. Исследование строения множества $\mathfrak{R}$ носит не только фундаментальный характер, но и, как будет показано ниже, имеет непосредственное практическое значение, так как оно связано с такими характеристиками риска, как сложность и энтропия.

Введем в рассмотрение множества рисков с одинаковым (фиксированным) количеством возможных исходов:

$$\mathfrak{R}^{\#k} \underset{Def}{=} \left\{ \boldsymbol{R} \colon \boldsymbol{R} \in \mathfrak{R}, \left| \boldsymbol{R} \right| = k \right\},\ k \in \mathbb{Z}_0^+,$$

где $\mathbb{Z}_0^+$ – множество неотрицательных целых чисел.

Используя это определение, можно ввести на множестве рисков $\mathfrak{R}$ отношение совпадения количества исходов:

$$\boldsymbol{R}_1 \,\#\#\, \boldsymbol{R}_2 \underset{Def}{\Leftrightarrow} \exists k \left(\boldsymbol{R}_1 \in \mathfrak{R}^{\#k}, \boldsymbol{R}_2 \in \mathfrak{R}^{\#k} \right).$$

Очевидно, что фактор-моноид $\left\langle \mathfrak{R}, \bullet \right\rangle / \#\#$ изоморфен моноиду $\left\langle \mathbb{Z}_0^+, \times \right\rangle$. Это – тривиальная характеризация строения множества рисков.

Возможны ли менее тривиальные характеризации строения множества рисков? Ответ на этот вопрос положительный, по крайней мере, для случая, когда моноид $\left\langle C, \circ \right\rangle$ изоморфен моноиду $\left\langle \mathbb{R}, + \right\rangle$. Эта ситуация характерна, например, для экономических систем, когда состояния системы чаще всего монетизированы.

Введем в рассмотрение еще одну разновидность подмножеств множества рисков – множество рисков, включающее все совместные риски из двух множеств с фиксированными количествами исходов:

$$\mathfrak{R}^{\#m\#n} \underset{Def}{=} \mathfrak{R}^{\#m} \bullet \mathfrak{R}^{\#n} \underset{Def}{=} \left\{ \boldsymbol{R}_1 \bullet \boldsymbol{R}_2 : \boldsymbol{R}_1 \in \mathfrak{R}^{\#m}, \boldsymbol{R}_2 \in \mathfrak{R}^{\#n} \right\}.$$

Докажем, что $\mathfrak{R}^{\#m\#n} \subset \mathfrak{R}^{\#mn}$, или, иначе, что $\mathfrak{R}^{*mn} \underset{Def}{=} \mathfrak{R}^{\#mn} \setminus \mathfrak{R}^{\#m\#n} \neq$ $\neq \varnothing$. Для этого рассмотрим два мультимножества из $\mathfrak{R}$:

$$\boldsymbol{R}_1 = \left\{k_{11} * (c_{11}, p_{11}), k_{12} * (c_{12}, p_{12}), \ldots, k_{1i} * (c_{1i}, p_{1i})\right\},$$

$$\boldsymbol{R}_2 = \left\{k_{21} * (c_{21}, p_{21}), k_{22} * (c_{22}, p_{22}), \ldots, k_{2j} * (c_{2j}, p_{2j})\right\},$$

а также их произведение:

$$\boldsymbol{R}_1 \bullet \boldsymbol{R}_2 = \left\{k_1 * (c_1, p_1), k_2 * (c_2, p_2), \ldots, k_n * (c_n, p_n)\right\}.$$

Не снижая общности, предположим, что эти мультимножества не содержат незначимых с теоретико-вероятностной точки зрения элементов, иначе говоря, элементов с нулевой второй компонентой. Далее, полагая, что элементы этих трех мультимножеств упорядочены по возрастанию своей второй компоненты, можно говорить о совместности следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} p_{11}\ p_{21} = p_1, \\ p_{1i}\ p_{2j} = p_n, \\ p_{11}\ p_{2j} = p_r, \\ p_{1i}\ p_{21} = p_s, \end{cases}$$

где $r, s \in \{2, 3, \ldots, n-1\}$.

Перемножив левые и правые части первого и второго, а также третьего и четвертого уравнений в системе и сравнив полученные уравнения между собой, получаем условие совместности системы:

$$p_1\ p_n = p_r\ p_s,\ r, s \in \{2, 3, \ldots, n-1\}.$$

Это условие выполняется далеко не при всех фиксированных ненулевых p_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, что доказывает выше сформулированное утверждение.

Известно, что множество целых неотрицательных чисел можно разбить следующим образом:

$$\mathbb{Z}_0^+ = \{0, 1\} \cup \mathbb{P} \cup \left\{\Pi_{i=1}^n\ p_i^{e_i} : p_i \in \mathbb{P}, e_i \in \mathbb{N}, i = 1, 2, \ldots, n,\ n \in \mathbb{N}\right\},$$

где $\mathbb{P}$ – множество простых чисел,

$\mathbb{N} = \mathbb{Z}^+$ – множество натуральных (целых положительных) чисел.

Воспользовавшись этим разбиением и ранее доказанным утверждением, множество рисков можно представить подобным предыдущему разбиению образом:

$$\mathfrak{R} = \{\varnothing\} \cup \mathfrak{R}^{\#1} \cup \mathfrak{R}^{\#p} \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{\substack{p_i \in \mathbb{P}, \\ e_i \in \mathbb{N}, \\ i=1,2,\ldots,n}} \left[\prod_{i=1}^{n} \left(\mathfrak{R}^{\# p_i}\right)^{e_i} \cup \mathfrak{R}^{*(\Pi_{i=1}^{n} p_i^{e_i})} \right].$$

Эта характеризация строения множества рисков уже не является тривиальной, она содержит члены, которые будучи принадлежащими одному классу эквивалентности фактор-моноида $\langle \mathfrak{R}, \bullet \rangle / \#\#$, существенно отличаются друг от друга по характеристике сложности.

Введем две специальные константы. Пусть H_0 – информационная энтропия процедуры равновероятного выбора одного из целых чисел, H_1 – информационная энтропия процедуры равновероятного выбора некоторого действительного числа. Используя введенные константы, можно вычислить энтропийные характеристики элементов составных частей множества рисков $\mathfrak{R}$, полученных в рамках нетривиального разбиения. Эти характеристики приведены в таблице 1.

Таблица 1

Энтропийные характеристики составных частей множества рисков

Номер компоненты	Компонента разбиения	Мощность мультимножеств, принадлежащих компоненте	Информационная энтропия мультимножеств
1	$\{\varnothing\}$	0	0
2	$\mathfrak{R}^{\#1}$	1	H_1
3	$\mathfrak{R}^{\#p}$	p	$2pH_1$
4	$\prod_{i=1}^{n}\left(\mathfrak{R}^{\# p_i}\right)^{e_i}$	$\Pi_{i=1}^{n} p_i^{e_i}$	$\Sigma_{i=1}^{n}(2p_i H_1 + H_0) =$ $= nH_0 + 2H_1 \Sigma_{i=1}^{n} p_i$
5	$\mathfrak{R}^{*(\Pi_{i=1}^{n} p_i^{e_i})}$	$\Pi_{i=1}^{n} p_i^{e_i}$	$2H_1 \Pi_{i=1}^{n} p_i^{e_i}$

Нетрудно заметить, что информационная энтропия элементов четвертой компоненты за единичными исключениями больше энтропии элементов пятой компоненты при равных мощностях мультимножеств. Фундаментальное значение этого отличия заключается в способности объяснить, почему порой с виду риски одинаковой сложности управляются по-разному: для одних рисков иногда легко удается найти схему компенсации, для других – случается, что не удается вообще. Например, одно дело – розничный кредитный портфель [6; 9], состоящий из 780 договоров, и совсем другое – инвестиционный проект, длительностью в 3 года, когда в течение каждого рабочего дня происходит закрытие какого-либо субконтракта в самых разных сферах человеческой деятельности. Еще один пример из этой области – конкурентные преимущества, возникающие при реализации концепции управляемого контракта [5; 11].

Подводя итог, отметим, что в данной работе было изучено строение универсального множества абстрактных рисков развития дискретных систем в контексте аналогии с факторизацией целых чисел. Были обнаружены отличия потенциала факторизации рисков и целых чисел в пределах класса эквивалентности рисков и изоморфного ему целого числа. Выявленное отличие охарактеризовано разбиением соответствующего класса эквивалентности на два подмножества, элементы которых значительно отличаются значением информационной энтропии. Учитывая, что использование энтропийной меры риска наряду с традиционными позволяет более точно управлять рисками, в том числе в условиях неполной или некачественной информации [11], то можно говорить о фундаментальной роли данного исследования для развития АТР.

Список литературы

1. Бородин А.В. Архитектура информационной системы поддержки принятия решений по управлению персоналом розничной подсистемы коммерческого банка / А.В. Бородин // Программные системы и вычислительные методы. – 2014. – №2. – С. 174–190. – DOI: 10.7256/2305–6061.2014.2.12331.

2. Бородин А.В. Модели управления персоналом в розничной подсистеме коммерческого банка / А.В. Бородин // Экономика и социум: современные модели развития общества в аспекте глобализации: Материалы III международной

научно-практической конференции (12 февраля 2014 г.). – Саратов: Издательство ЦПМ «Академия Бизнеса», 2014. – С. 26–31.

3. Бородин А.В. Стохастическое моделирование в задачах синтеза оптимальных топологий сетей дистрибуции точного времени / А.В. Бородин, Д.Р. Зубьяк // Технические науки – от теории к практике. – 2014. – №34. – С. 7–15.

4. Бородин А.В. Технико-экономическое обоснование варианта резервирования сетевой компоненты отказоустойчивой масштабируемой вычислительной системы специального назначения / А.В. Бородин // Кибернетика и программирование. – 2015. – №6. – С. 55–70. – DOI: 10.7256/2306–4196.2015.6.17523.

5. Варьяш И. Ю. Управляемый контракт / И. Ю. Варьяш // Банковские технологии. – 2005. – №7. – С. 28–35.

6. Уразаева Т.А. Алгебраическая система рисков и ее приложения в сфере кредитования / Т.А. Уразаева // Вестник Поволжского государственного технологического университета. Серия: Экономика и управление. – 2012. – №1 (15). – С. 24–31.

7. Уразаева Т.А. Алгебраические аспекты имитационного моделирования портфелей срочных финансовых инструментов / Т.А. Уразаева, А.В. Бородин // Материалы конференции «Имитационное моделирование. Теория и практика». ИММОД-2013. Т. 1. – Казань: Издательство «Фэн» Академии наук РТ, 2013. – С. 282–286.

8. Уразаева Т.А. Алгебра рисков: теория и алгоритмы / Т.А. Уразаева. – Йошкар-Ола: Поволжский государственный технологический университет, 2013. – 208 с.

9. Уразаева Т.А. Масштабные эффекты в розничном кредитном портфеле / Т.А. Уразаева // Современные проблемы и перспективы социально-экономического развития предприятий, отраслей, регионов – Йошкар-Ола: Поволжский государственный технологический университет, 2013. – С. 382–387.

10. Уразаева Т.А. Модели риска в технико-экономическом обосновании инфраструктурных решений / Т.А. Уразаева // Современные проблемы и перспективы социально-экономического развития предприятий, отраслей, регионов: сборник статей. – Йошкар-Ола: Поволжский государственный технологический университет, 2015. – С. 161–164.

11. Уразаева Т.А. Риск, вероятностная неопределенность и неопределенность вероятностных мер в портфельном анализе / Т.А. Уразаева // Моделирование и анализ безопасности и риска в сложных системах: Труды международной научной школы МА БР-2007. – СПб.: ГУАП, 2007. – С. 224–227.