

Левина Галина Абрамовна

профессор

Дахтин Иван Сергеевич

аспирант

Булатов Владислав Сергеевич

магистрант

ФГБОУ ВО «Южно-Уральский государственный

университет» (НИУ)

г. Челябинск, Челябинская область

DOI 10.21661/r-113072

РАСЧЕТ СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ ИЗГИБНЫХ КОЛЕБАНИЙ ОДНООСНОГО ПОВОРОТНОГО СТЕНДА

***Аннотация:** в работе дан вывод уравнений изгибных колебаний вала одноосного испытательного стенда новой разработки; уравнения получены с учетом статической и динамической неуравновешенностей поворотного стола; использованы плоские и пространственные модели упругих перемещений вала. Приведены результаты вычислений собственных частот изгибных колебаний; значения собственных частот при параметрах, соответствующих проекту, существенно превышают скорость вращения вала, что исключает возможность обычного резонанса от возмущений, обусловленных смещением центра масс, и главного демультипликационного резонанса от параметрических возмущений, обусловленных динамической неуравновешенностью стола.*

***Ключевые слова:** одноосный поворотный стенд, математическое моделирование, уравнения изгибных колебаний, гироскопические моменты, частотное уравнение, вычисления собственных частот.*

Одноосный поворотный стенд (поворотный стол) предназначен для испытаний гироскопических и других навигационных приборов, работающих в условиях вращений и угловых колебаний основания. Вал стенда с вертикальной осью приводится во вращение электродвигателем посредством соединительной

муфты, как представлено на рисунке 1, номинальная скорость вращения стола сравнительно мала (~ 300 град/с).

Стенд может работать как в условиях разгона, торможения и установившегося вращения, так и в условиях вынужденных угловых колебаний вала вокруг его оси с частотой $\sim 15 - 20$ Гц [1].

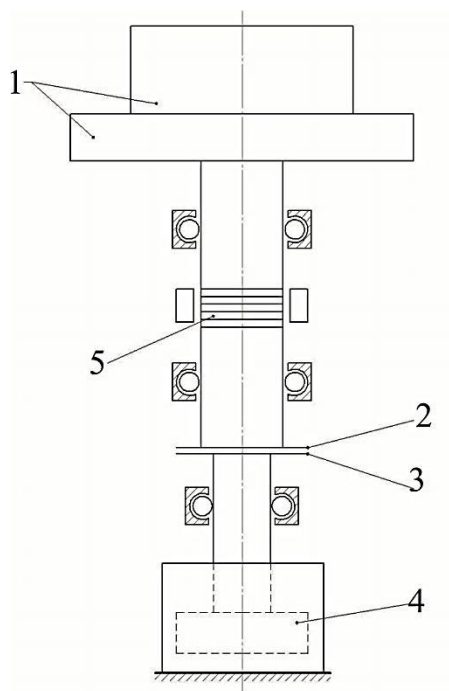


Рис. 1. Кинематическая схема: 1) стол с прибором; 2, 3) обкладки муфты; 4) ротор двигателя; 5) ламель токоподвода

Изгибные колебания вала стенда могут возникнуть вследствие неуравновешенности испытуемого приборного блока относительно оси поворота стола.

В задаче об изгибных колебаниях переходим к упрощенной расчетной схеме стенда с цельным (не составным) валом с двумя опорами, принимая муфту абсолютно жесткой. Решаем задачу без учета инерции вала и ротора двигателя. Стол вместе с прибором представляем абсолютно твердым телом, а недеформированный вал - имеющим форму тела вращения. Обозначаем через Ox_{uz} неподвижную систему координат, в которой ось Ox совпадает с осью вращения.

1. Уравнения малых изгибных колебаний вала на плоскости.

Вводим систему координат $O_1\xi\eta\zeta$, неизменно связанную со столом, произвольное положение которой показано на рисунке 2. В отсчетной недеформированной конфигурации вала точка O_1 совпадает с точкой $O_1^{(0)}$ на оси x , а ось ξ совпадает с осью x .

Рассматриваем упругие колебания вала на плоскости (x, y) . В качестве обобщенных координат стола выбираем величины: $s = y_{01}$ – нормальное упругое перемещение оси вала в точке $O_1^{(0)}$ и θ – угол поворота нормального сечения вала в точке $O_1^{(0)}$, обусловленный изгибом оси.

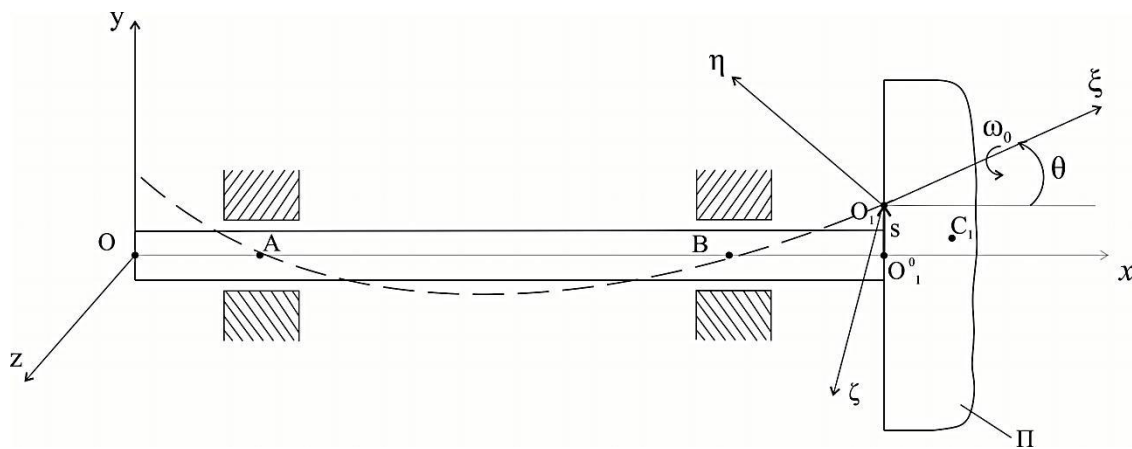


Рис. 2. К выводу уравнений изгибных колебаний на плоской модели

Заметим: на рисунке вал изображен условно как геометрически однородный, в действительности нормальные сечения на участках OA , AB , BO_1 различаются формами (кольцо или круг) и размерами, что с необходимостью учитывается в расчетах изгибных колебаний.

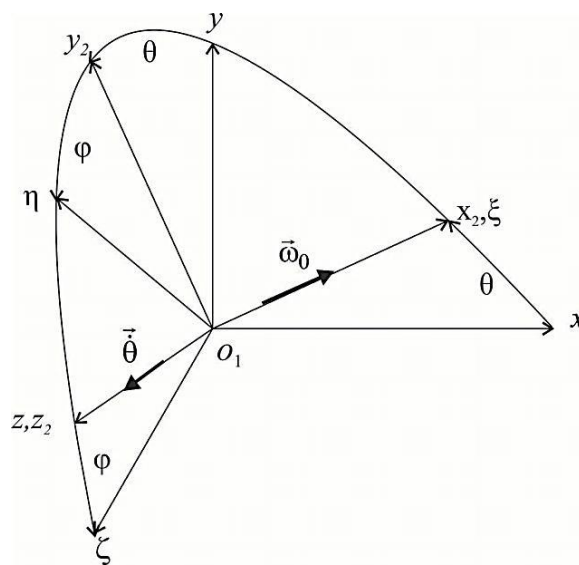


Рис. 3. Углы поворота стола

Рассматриваем повороты θ и φ стола с помощью осей Резаля $O_1x_2y_2z_2$, как показано на рисунке 3, где φ – угол собственного вращения вокруг оси x_2 , совпадающей с осью ξ , и $\dot{\varphi} = \omega_0$. Угловая скорость стола в пространстве $Oxyz$ с учетом упругого поворота есть

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_0 + \vec{\dot{\theta}}. \quad (1)$$

Скорость центра масс C_1 стола с прибором определяем, используя формулу кинематики

$$\vec{V}_{C_1} = \vec{V}_{O_1} + \vec{\omega} \times \overrightarrow{O_1C_1}. \quad (2)$$

Затем получаем выражение

$$V_{C_1}^2 = \dot{s}^2 + 2\dot{s}\dot{\theta}a_1 + 2\dot{s}\omega_0a_2 + 2\dot{\theta}\omega_0a_3 + \dot{\theta}^2a_4 + \omega_0^2(\zeta_{C_1}^2 + \eta_{C_1}^2), \quad (3)$$

где $a_1 = \xi_{C_1}\cos\theta + (\zeta_{C_1}\sin\varphi - \eta_{C_1}\cos\varphi)\sin\theta$; $a_2 = -(\zeta_{C_1}\cos\varphi + \eta_{C_1}\sin\varphi)\cos\theta$; $a_3 = -\xi_{C_1}(\zeta_{C_1}\cos\varphi + \eta_{C_1}\sin\varphi)$; $a_4 = \xi_{C_1}^2 + (\zeta_{C_1}\sin\varphi - \eta_{C_1}\cos\varphi)^2$; $a_5 = \zeta_{C_1}^2 + \eta_{C_1}^2$; $\xi_{C_1}, \eta_{C_1}, \zeta_{C_1}$ – координаты центра масс C_1 стола с прибором.

Кинетическая энергия стола в сферическом движении вокруг центра масс C_1 с учетом кинематической формулы (1) находится

$T_{\text{сф.дв.}} = \frac{1}{2} (J_{\xi\xi}^* \omega_0^2 + J_{\eta\eta}^* \dot{\theta}^2 \sin^2 \varphi + J_{\zeta\zeta}^* \dot{\theta}^2 \cos^2 \varphi - 2J_{\xi\eta}^* \omega_0 \dot{\theta} \sin \varphi - 2J_{\xi\zeta}^* \omega_0 \cos \varphi - 2J_{\eta\zeta}^* \dot{\theta}^2 \sin \varphi \cos \varphi),$	(4)
--	-----

где J_{ij}^* – моменты инерции относительно осей, проходящих через центр масс.

Уравнения малых колебаний, полученные методом сил на основе расчетной схемы, изображенной на рисунке 4, имеют вид

$$y_{O_1} = s = \delta_{11} Q_s^{\text{ин}} + \delta_{12} Q_\theta^{\text{ин}}; \theta = \delta_{21} Q_s^{\text{ин}} + \delta_{22} Q_\theta^{\text{ин}}. \quad (5)$$

где $s = W(x = c)$; $\theta = \left(\frac{dW}{dx} \right) \Big|_{x=c}$; $W(x, t)$ – распределение прогибов вдоль оси вала; δ_{kl} ($k, l = 1, 2$) – коэффициенты влияния; $Q_s^{\text{ин}}, Q_\theta^{\text{ин}}$ – обобщенные силы инерции.

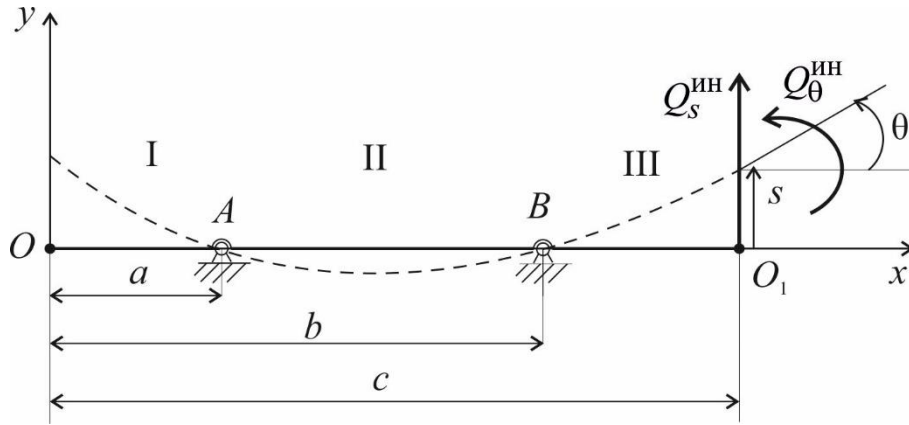


Рис. 4. Расчетная схема к определению изгибных колебаний вала на плоскости

Обобщенные силы инерции по координатам $q_1 = s$ и $q_2 = \theta$ определяем по формулам Лагранжа

$$Q_{q_i}^{\text{ин}} = - \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} \right], i = 1, 2,$$

используя представление кинетической энергии T стола по формуле Кёнига

$$T = \frac{1}{2} (m_1 V_{C_1}^2 + T_{\text{сф.дв.}}) \quad (6)$$

и учитывая равенства (3) и (4).

Сохраняя в выражениях для обобщенных сил инерции основные слагаемые – линейные относительно малых упругих перемещений s и θ и их производных, а также свободные слагаемые, не зависящие от s и θ , и пренебрегая слагаемыми высших порядков, принимая условие $\dot{\varphi} = \omega_0 = const$, приходим к приближенным формулам

$$Q_s^{\text{ин}} \cong -\left(a_{11}\ddot{s} + a_{12}\ddot{\theta} - f_1(t)\right); Q_\theta^{\text{ин}} \cong -\left(a_{21}\ddot{s} + a_{22}\ddot{\theta} + a_{23}\dot{\theta}\omega_0 - f_2(t)\right), \quad (7)$$

где $a_{11} = m_1$; $a_{12} = m_1\xi_{c_1}$; $a_{21} = a_{12}$;

$$a_{22} = m_1\xi_{c_1}^2 + (J_{\eta\eta}^* + m_1\zeta_{c_1}^2)\sin^2\varphi + (J_{\zeta\zeta}^* + m_1\eta_{c_1}^2)\cos^2\varphi - (J_{\eta\zeta}^* + m_1\zeta_{c_1}\eta_{c_1})\sin 2\varphi;$$

$$a_{23} = (J_{\eta\eta}^* - J_{\zeta\zeta}^* + m_1(\zeta_{c_1}^2 - \eta_{c_1}^2))\sin 2\varphi - 2(J_{\eta\zeta}^* + m_1\zeta_{c_1}\eta_{c_1})\cos 2\varphi;$$

$$f_1(t) = -m_1\omega_0^2(\zeta_{c_1}\sin\varphi(t) - \eta_{c_1}\cos\varphi(t));$$

$$f_2(t) = -\omega_0^2\left(m_1\xi_{c_1}(\zeta_{c_1}\sin\varphi(t) - \eta_{c_1}\cos\varphi(t)) - J_{\xi\eta}^*\cos\varphi(t)J_{\xi\zeta}\sin\varphi(t)\right);$$

Уравнения малых колебаний (4) преобразуются к прямой форме и записываются в виде [2]

$$\begin{aligned} a_{11}\ddot{s} + a_{12}\ddot{\theta} + c_{11}s + c_{12}\theta &= f_1(t); \\ a_{21}\ddot{s} + a_{22}\ddot{\theta} + a_{23}\omega_0\dot{\theta} + c_{12}s + c_{22}\theta &= f_2(t). \end{aligned} \quad (8)$$

Коэффициенты жесткости (квазиупругости) c_{kl} определяются через коэффициенты влияния:

$$c_{11} = \frac{\delta_{22}}{\Delta}; c_{12} = -\frac{\delta_{12}}{\Delta}; c_{21} = c_{12}; c_{22} = \frac{\delta_{11}}{\Delta}; \Delta = \delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}^2. \quad (9)$$

Коэффициенты a_{22}, a_{23} являются периодическими функциями времени с периодом π/ω_0 , а правые части уравнений – периодическими функциями с периодом $2\pi/\omega_0$.

Коэффициенты влияния определяем с помощью расчетной схемы двухпорной балки, используя решения дифференциального уравнения малых прогибов с краевыми условиями, учитывающими связи балки в виде идеальных

шарниров и сращивание решений на стыках участков с разными коэффициентами изгибной жесткости $D_i = EJ_i$, где $i = I, II, III$. Рассматривая краевые условия совместно, получаем систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) относительно постоянных интегрирования C_1, \dots, C_6 , которая с учетом обозначения $X = colon(C_1, \dots, C_6)$ в матричной форме записывается

$$AX = F, \quad (10)$$

В задаче определения коэффициентов δ_{11} и δ_{21} имеем систему вида (10) с матрицами

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -\frac{D_I}{D_{II}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{D_{II}} & 0 & -\frac{1}{D_{III}} & 0 \\ a & 1 & -a & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 1 & -b & -1 \end{pmatrix};$$

$$F = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{R_B b^3}{3} - \frac{cb^2}{2} + \frac{b^3}{6} \\ \frac{1}{D_{II}} \left(-R_B ba + \frac{R_B a^2}{2} + ca - \frac{a^2}{2} \right) \\ \frac{1}{D_{III}} \left(cb - \frac{b^2}{2} \right) - \frac{1}{D_{II}} \left(-\frac{R_B b^2}{2} + cb - \frac{b^2}{2} \right) \\ \frac{R_B ba^2}{2} - \frac{R_B a^3}{6} - \frac{ca^2}{2} + \frac{a^3}{6} \\ -\frac{cb^2}{2} + \frac{b^3}{6} \end{pmatrix},$$

где $R_B = \frac{c-a}{b-a}$.

Из решения системы (10) находятся величины C_5, C_6 , затем вычисляются коэффициенты влияния согласно равенствам

$$\delta_{11} = W_{III}(x=c) = \frac{1}{D_{III}} \left(\frac{c^3}{3} + C_5 c + C_6 \right), \quad \delta_{21} = W'_{III}(x=c) = \frac{1}{D_{III}} \left(\frac{c^2}{2} + C_5 \right).$$

В задаче определения коэффициента влияния δ_{22} получаем систему вида (10) относительно постоянных интегрирования C_k^* с соответствующими задаче матрицами A и B , затем вычисляем коэффициент δ_{22}

$$\delta_{22} = W'_{III}(x = c) = \frac{1}{D_{III}}(c + C_5^*).$$

2. Уравнения изгибных колебаний вращающегося стола станда с учетом гироскопических моментов

Рассматривается задача об изгибе вала, в которой деформированная ось вала является пространственной кривой (рисунок 5). Вектор \vec{U} упругого перемещения оси в точке O_1 расположен в плоскости (y, z) :

$$\vec{U} = \vec{U}_y + \vec{U}_z.$$

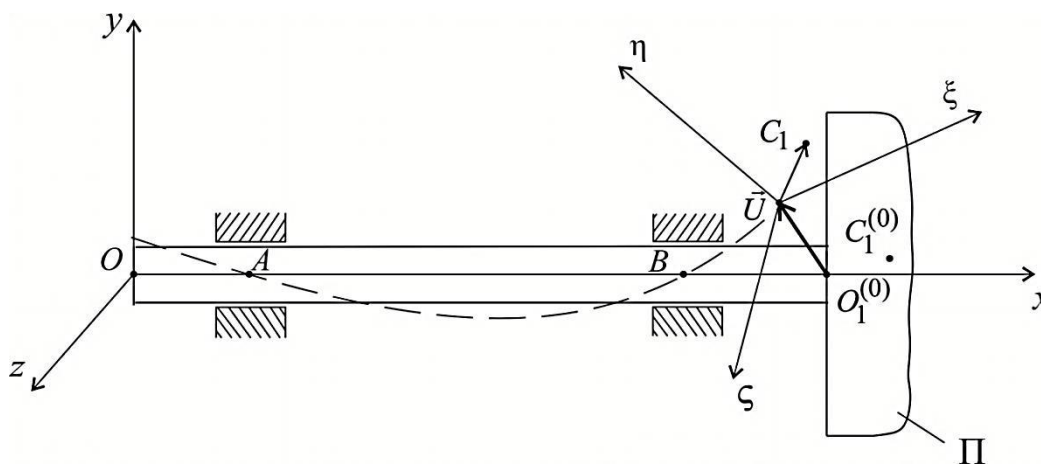


Рис. 5. К задаче о пространственных колебаниях стола станда

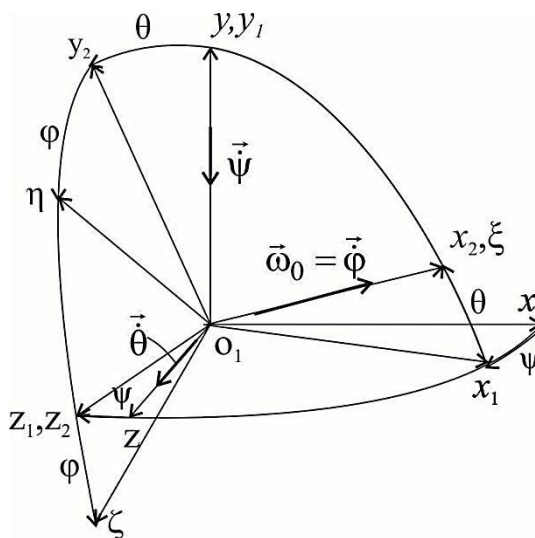


Рис. 6. К определению угловой скорости стола

В этом случае стол участвует в двух малых поворотах, обусловленных изгибными поворотами нормального сечения вала на углы ψ и θ , отсчитанные, как показано на рисунке 6. Угловая скорость поворотного стола определяется

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_0 + \vec{\dot{\psi}} + \vec{\dot{\theta}}$$

и в проекциях на связанные со столом оси записывается

$$\begin{aligned}\omega_{\xi} &= \omega_0 - \dot{\psi} \sin\theta; \\ \omega_{\eta} &= -\dot{\psi} \cos\theta \cos\varphi + \dot{\theta} \sin\varphi; \\ \omega_{\zeta} &= \dot{\psi} \cos\theta \sin\varphi + \dot{\theta} \cos\varphi.\end{aligned}\tag{11}$$

Скорость полюса O_1 в проекциях на связанные оси с учетом малости упругих перемещений находится в виде

$$\begin{aligned}V_{O_1\xi} &\cong \theta \dot{U}_y + \psi \dot{U}_z \cong 0; \\ V_{O_1\eta} &= \dot{U}_y \cos\varphi + \dot{U}_z \sin\varphi; \quad V_{O_1\zeta} = -\dot{U}_y \sin\varphi + \dot{U}_z \cos\varphi.\end{aligned}\tag{12}$$

Скорость центра масс стола с учетом равенств (2), (11), (12) в проекциях на связанные оси определяется

$$\begin{aligned}V_{c_1\xi} &\cong (-\dot{\psi} \cos\theta \cos\varphi + \dot{\theta} \sin\varphi) \zeta_{c_1} - (\dot{\psi} \cos\theta \sin\varphi + \dot{\theta} \cos\varphi) \eta_{c_1}. \\ V_{c_1\eta} &= \dot{U}_y \cos\varphi + \dot{U}_z \sin\varphi + (\dot{\psi} \cos\theta \sin\varphi + \dot{\theta} \cos\varphi) \xi_{c_1} - (\omega_0 - \dot{\psi} \sin\theta) \zeta_{c_1}; \\ V_{c_1\zeta} &= -\dot{U}_y \sin\varphi + \dot{U}_z \cos\varphi + \omega_0 \eta_{c_1} + (\dot{\psi} \cos\theta \cos\varphi - \dot{\theta} \sin\varphi) \xi_{c_1}.\end{aligned}\tag{13}$$

Кинетическая энергия стола находится с использованием равенств (6), (11), (13), обобщенные силы инерции $Q_{q_i}^{\text{ин}}$ ($i = \overline{1,4}$) по координатам $q_1 = U_y, q_2 = U_z, q_3 = \theta, q_4 = \psi$ определяются по формулам Лагранжа.

Принимаем следующие приближенные условия и допущения, упрощающие решение динамической задачи:

– оси ξ, η, ζ являются главными осями инерции стола с прибором в точке O_1 , тогда в выражениях обобщенных сил инерции обращаются в ноль слагаемые, содержащие множителями центробежные моменты инерции; такие слагаемые в уравнениях первого приближения представляют собой параметрические возмущения с частотой $2\omega_0$;

– выполняется равенство $J_{\eta\eta}^* = J_{\zeta\zeta}^*$, означающее, что ось ξ является осью динамической симметрии стола;

– можно пренебречь слагаемыми, содержащими величины второго порядка относительно смещений центра масс η_{c_1}, ζ_{c_1} ;

– можно пренебречь слагаемыми второго порядка относительно величин упругих перемещений U_y, U_z, ψ, θ и их производных по времени.

Уравнения малых упругих колебаний, полученные по методу сил, в данной задаче записываются в виде

$$\begin{aligned} U_y &= \delta_{11} Q_{U_y}^{ин} + \delta_{12} Q_{\theta}^{ин}; \theta = \delta_{12} Q_{U_y}^{ин} + \delta_{22} Q_{\theta}^{ин}; \\ U_z &= \delta_{11} Q_{U_z}^{ин} + \delta_{12} Q_{\psi}^{ин}; \psi = \delta_{12} Q_{U_z}^{ин} + \delta_{22} Q_{\psi}^{ин}, \end{aligned}$$

где коэффициенты влияния δ_{kl} – те же, что и в плоской задаче.

Уравнения колебаний в прямой форме, записанные приближенно с учетом принятых допущений, приводятся к виду

$$\begin{aligned} a_{11} \ddot{U}_y + a_{12} \ddot{\theta} + c_{11} U_y + c_{12} \theta &= f_1(t); \\ a_{12} \ddot{U}_y + a_{22} \ddot{\theta} + J_0 \omega_0 \dot{\psi} + c_{12} U_y + c_{22} \theta &= f_2(t); \\ a_{11} \ddot{U}_z + a_{12} \ddot{\psi} + c_{11} U_z + c_{12} \psi &= f_3(t); \\ a_{12} \ddot{U}_z + a_{22} \ddot{\psi} - J_0 \omega_0 \dot{\theta} + c_{12} U_z + c_{22} \psi &= f_4(t), \end{aligned} \tag{14}$$

где коэффициенты инерции: $a_{11} = m; a_{12} = m \xi_{c_1}; a_{22} = J_{\eta\eta}^* + m \xi_{c_1}^2$;

коэффициенты жесткости c_{kl} находятся по формулам (7);

в выделенных гироскопических слагаемых обозначено: $J_0 = J_{\xi\xi}^*$;

$$\begin{aligned} f_1(t) &= -m \omega_0^2 (\xi_{c_1} \sin \varphi - \eta_{c_1} \cos \varphi); f_2(t) = -m \omega_0^2 \xi_{c_1} (\zeta_{c_1} \sin \varphi - \eta_{c_1} \cos \varphi); \\ f_3(t) &= m \omega_0^2 (\zeta_{c_1} \cos \varphi + \eta_{c_1} \sin \varphi); f_4(t) = -m \omega_0^2 \xi_{c_1} (\zeta_{c_1} \cos \varphi + \eta_{c_1} \sin \varphi). \end{aligned}$$

Уравнения (14) при условии $\dot{\varphi} = \omega_0 = const$ описывают в первом приближении вынужденные колебания системы, полученной из консервативной системы добавлением гироскопических обобщенных сил.

Для анализа собственных частот рассматриваем соответствующую уравнениям (14) однородную систему. Частное решение однородной системы записывается с учетом ее структуры в виде [3]

$$U_y = B_1 \sin(pt); \theta = B_2 \sin(pt); U_z = B_1 \cos(pt); \Psi = B_2 \cos(pt).$$

Из условия существования ненулевого решения СЛАУ для амплитудных коэффициентов B_i следует частотное уравнение

$$b_0 p^4 + b_1 p^3 + b_2 p^2 + b_3 p + b_4 = 0 \quad (15),$$

с коэффициентами

$$b_0 = a_{11}a_{22} - a_{12}^2; b_1 = J_0 \omega_0 a_{11}; b_1 = J_0 \omega_0 a_{11};$$

$$b_2 = 2c_{12}a_{12} - a_{11}c_{22} - c_{11}a_{22}; b_3 = -J_0 \omega_0 c_{11}; b_4 = c_{11}c_{22} - c_{12}^2.$$

Заметим, что в условиях принятых приближений уравнения (8) принимают вид уравнений малых колебаний консервативной системы.

При условии пренебрежения гироскопическими моментами имеем $b_1 = b_3 = 0$, и тогда из уравнения (15) следует частотное уравнение для приближенной плоской модели.

3. Численный анализ частот собственных изгибных колебаний

На основе построенных приближенных математических моделей получены частоты собственных изгибных колебаний вала станда. Численные решения выполнены в системе MATLAB R2012a с применением функции «roots».

Расчеты выполнены при параметрах станда: диаметр вала на участке I – $d_1 = 22 \cdot 10^{-3}$ м; диаметр вала на участке II – $d_2 = 55 \cdot 10^{-3}$ м; наружный и внутренний диаметры вала на участке III – $d_{3н} = 50 \cdot 10^{-3}$ м и $d_{3в} = 20 \cdot 10^{-3}$ м соответственно; $J_{\eta\eta} = 0,4204$ кг · м²; $m = 20$ кг. Указанные параметры соответствуют проекту, описанному в работе [1].

В таблице 1 приведены значения собственных частот, полученные на плоской модели упругих перемещений, при различных длинах участков вала.

В таблице 2 даны значения собственных частот, полученные расчетом на пространственной модели упругой линии вала, с варьированием величины его скорости собственного вращения от заданного значения 5,26 рад/с. Расчеты выполнены при значениях длин участков, соответствующих первому варианту из таблицы 1. Отрицательные решения, содержащиеся в таблице 2, соответствуют вращению упругой линии вала в сторону, противоположную вращению вала [3].

Таблица 1

Собственные частоты изгибных колебаний вала,
полученные расчетом на плоской модели

Длины участков вала, мм	$a=48; b=167; c=347$	$a=70; b=200; c=380$	$a=100; b=230; c=410$
Первая частота, Гц	649,39	643,81	643,81
Вторая частота, Гц	4454,53	4422,37	4422,37

Таблица 2

Собственные частоты изгибных колебаний вала,
полученные на модели с учетом гироскопических моментов

Угловая скорость вала стенда, рад/с	5,26	52,6	526
Первая частота, Гц	649,75	649,17	643,38
Вторая частота, Гц	4456,84	4455,79	4445,34
Третья частота, Гц	-649,88	-650,46	-656,29
Четвертая частота, Гц	-4457,08	-4458,13	-4468,68

Выводы:

– значения собственных частот изгибных колебаний, вычисленные при параметрах разрабатываемого стенда, превышают в 100 и более раз заданную скорость вращения вала (стола) стенда; следовательно, в рассматриваемом проекте заданная скорость вращения вала существенно меньше критических скоростей и существенно меньше скорости, при которой возможен главный демультипликационный резонанс;

– из сравнения значений собственных частот, приведенных в таблицах 1 и 2, следует вывод о незначительном влиянии гироскопических моментов на собственные частоты изгибных колебаний вала в проекте стенда;

– построенные математические модели полезны для дальнейшего изучения динамики стенда с учетом его неуравновешенности.

Список литературы

1. Седышев В.В. Одноосный испытательный стенд углового движения / В.В. Седышев, Р.В. Тепляков, В.А. Цапов // Наука, техника и образование. – М.: Проблемы науки, 2016. – №2 (20). – С. 36–38.
2. Бабаков И.М. Теория колебаний: Учебное пособие / И.М. Бабаков. – М.: Дрофа, 2004. – 592 с.
3. Бидерман В.Л. Теория механических колебаний: Учебник для вузов / В.Л. Бидерман. – М.: ВШ, 1980. – С. 354–360.