Уразаева Татьяна Альфредовна
канд. экон. наук, заведующая кафедрой
ФГБОУ ВО «Поволжский государственный
технологический университет»
г. Йошкар-Ола, Республика Марий Эл

DOI 10.21661/r-113341

О КОНЦЕПЦИИ НЕРАЗЛИЧИМОСТИ В АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ РИСКА

***Аннотация**: данная статья посвящена исследованию феномена неразличимости рисков с теоретико-вероятностной и практической точек зрения в рамках теории конгруэнций на алгебраических структурах. Автором рассмотрены вычеты, соответствующие исследованным конгруэнциям и их композиции. Показано значение этих вычетов для повышения производительности вычислений над рисками.*

***Ключевые слова**: алгебра рисков, коммутативная экономика, коммутативный моноид, конгруэнция, неразличимость рисков, операция агрегации риска, вычисление совместного риска, полукольцо, риск.*

Большинство современных методов анализа риска в экономических системах либо используют предположения о каком-либо каноническом вероятностном распределении величин, характеризующих систему, либо основываются на методах Монте-Карло. Методы прямого вычисления риска по институциональному описанию экономической системы считаются вычислительно трудными. С другой стороны, известно, что во многих случаях распределения заметно отличаются от канонических [3; 8], а поведение методов Монте-Карло может приводить к неадекватным результатам [6; 7]. Создание алгебраической теории риска [13] во многом позволило преодолеть ограничения прямых подходов к расчету риска. Настоящая статья развивает идеи, изложенные в монографии [13] в направлении поиска возможности дальнейшего повышения эффективности вычислений, используя идеи неразличимости рисков.

Пусть S – множество всех возможных состояний экономики. Будем рассматривать такое подмножество $C \subseteq \mathrm{Map}(S, S)$ всех отображений множества состояний экономики на себя, которое содержит лишь коммутативные по отношению к операции композиции отображения:

$$\forall c_1, c_2 \left(c_1, c_2 \in C\right)\left[\, c_2 \circ c_1 = c_1 \circ c_2 \,\right]$$

(коммутативная экономика).

Рассмотрим множество мультимножеств, заданное набором носителей специального вида:

$$\mathfrak{A} = \left\{ \boldsymbol{A} :\ \mathrm{Supp}\, \boldsymbol{A} \subset C \times \mathbb{I} \right\},$$

где $\mathbb{I} = [0,1] \subset \mathbb{R}$, $\mathbb{R}$ – множество действительных чисел. Иначе говоря, будем рассматривать множество всех возможных наборов сценариев развития системы на S с указанием вероятностей этих сценариев.

Определим на $\mathfrak{A}$ операции сложения:

$$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} \underset{Def}{=} \left\{ k_{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}}(u) * u :\ k_{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}}(u) = k_{\boldsymbol{A}}(u) + k_{\boldsymbol{B}}(u), \right.$$

$$\left. u \in \mathrm{Supp}\, \boldsymbol{A} \cup \mathrm{Supp}\, \boldsymbol{B} \right\} \tag{1}$$

и умножения:

$$\boldsymbol{A} \bullet \boldsymbol{B} \underset{Def}{=} \left\{ k_{\boldsymbol{A}\bullet\boldsymbol{B}}(u) * u :\ k_{\boldsymbol{A}\bullet\boldsymbol{B}}(u) = \sum_{\substack{x \in \mathrm{Supp}\, \boldsymbol{A}, \\ y \in \mathrm{Supp}\, \boldsymbol{B}, \\ xy = u}} k_{\boldsymbol{A}}(x)\, k_{\boldsymbol{B}}(y), \right.$$

$$\left. u \in \bigcup_{\substack{x \in \mathrm{Supp}\, \boldsymbol{A}, \\ y \in \mathrm{Supp}\, \boldsymbol{B}}} \{xy\} \right\}. \tag{2}$$

Для множества $\mathfrak{A}$ и определенных на нем операций сложения и умножения справедлива следующая теорема [13].

Теорема 1. Алгебра $\langle \mathfrak{A}, +, \bullet \rangle$ является коммутативным полукольцом с единицей.

Теперь рассмотрим множество всех мультимножеств (сценариев), полных по вероятности:

$$\mathfrak{R} = \left\{ \boldsymbol{R} :\ \boldsymbol{R} \in \mathfrak{A}, \Sigma_{x \in \operatorname{Supp} \boldsymbol{R}}\, k_{\boldsymbol{R}}(x) \operatorname{pr}_{\mathbb{I}} x = 1 \right\}.$$

Множество мультимножеств $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{R} \subset \mathfrak{A}$, представляет из себя множество возможных рисков в исследуемых экономиках или, иначе, множество описаний полных групп событий в этих экономиках на момент закрытия каких-либо позиций. В то же время, достаточно часто приходится рассматривать неполные группы событий или даже отдельные события. В рамках используемой парадигмы риска неполные группы событий мы будем ассоциировать с частями риска. Для описания частей риска в экономической системе в условиях вероятностной неопределенности будем использовать мультимножества из следующего множества:

$$\mathfrak{P} = \left\{ \boldsymbol{R} :\ \boldsymbol{R} \in \mathfrak{A}, \Sigma_{x \in \operatorname{Supp} \boldsymbol{R}}\, k_{\boldsymbol{R}}(x) \operatorname{pr}_{\mathbb{I}} x \le 1 \right\}.$$

Очевидно, что $\mathfrak{P} \subset \mathfrak{A}$, и, таким образом, для элементов из $\mathfrak{P}$ определены операции сложения (1) и умножения (2).

Для множества $\mathfrak{P}$ и определенной на нем операции умножения справедлива следующая теорема [13].

Теорема 2. Алгебра $\langle \mathfrak{P}, \bullet \rangle$ – коммутативный моноид.

Таким образом, заметим, что множество рисков и их частей в коммутативной экономике можно рассматривать как коммутативный моноид (относительно операции вычисления совместного риска), вложенный в коммутативное полукольцо с единицей, на котором определена частичная операция сложения (агрегации риска).

Будем говорить, что отношение ρ на группоиде $\langle A, * \rangle$ *стабильно* (или *регулярно*, или *однородно*) *справа* (*слева*), если $x \rho y$ $(x, y \in A)$ влечет за собой $x * z \rho y * z$ $(z * x \rho z * y)$ для каждого $z \in A$. Стабильное справа (слева) отношение эквивалентности на A будем называть *правой* (*левой*) *конгруэнцией на* A.

Конгруэнцией на A называется отношение эквивалентности, являющееся и левой, и правой конгруэнцией [11].

Введем в рассмотрение отображение $\tilde{\kappa}\colon \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}^1$, где

$$\mathfrak{A}^1 = \left\{ \boldsymbol{R} \colon \boldsymbol{R} \in \mathfrak{A}, \forall x \left(x \in \operatorname{Supp} \boldsymbol{R} \right) \left[k_{\boldsymbol{R}}(x) = 1 \right] \right\}.$$

Определим его следующим образом:

$$\tilde{\kappa}(\boldsymbol{R}) \underset{Def}{=} \left\{ 1 * \left(\tilde{c}, \sum_{\substack{x \in \operatorname{Supp} \boldsymbol{R}, \\ \operatorname{pr}_C x = \tilde{c}}} k_{\boldsymbol{R}}(x) \operatorname{pr}_{\mathbb{I}} x \right) \colon \tilde{c} \in \bigcup\nolimits_{x \in \operatorname{Supp} \boldsymbol{R}} \left\{ \operatorname{pr}_C x \right\} \right\}. \tag{3}$$

Используя отображение (3), определим отношение κ на $\mathfrak{A}$:

$$\boldsymbol{R}_1 \kappa \boldsymbol{R}_2 \underset{Def}{\Leftrightarrow} \tilde{\kappa}(\boldsymbol{R}_1) = \tilde{\kappa}(\boldsymbol{R}_2),\ \boldsymbol{R}_1, \boldsymbol{R}_2 \in \mathfrak{A}.$$

Можно доказать следующую теорему.

Теорема 3. Отношение κ является конгруэнцией на полукольце $\langle \mathfrak{A}, +, \bullet \rangle$.

Иначе говоря, с теоретико-вероятностной точки зрения риски и их части в коммутативной экономике различимы с точностью до конгруэнции κ.

Построим еще одну конгруэнцию, важную для рассматриваемой предметной области. Введем в рассмотрение отображение $\tilde{\sigma}\colon \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}_{>0}$, где

$$\mathfrak{A}_{>0} = \left\{ \boldsymbol{R} \in \mathfrak{A} \colon \forall x \left(x \in \operatorname{Supp} \boldsymbol{R} \right) \left[\operatorname{pr}_{\mathbb{I}} x > 0 \right] \right\}.$$

Определим его следующим образом:

$$\tilde{\sigma}(\boldsymbol{R}) \underset{Def}{=} \left\{ k_{\boldsymbol{R}}(x) * x \colon \operatorname{pr}_{\mathbb{I}} x > 0, x \in \operatorname{Supp} \boldsymbol{R} \right\}. \tag{4}$$

Используя отображение (4), определим отношение σ на $\mathfrak{A}$:

$$\boldsymbol{R}_1 \sigma \boldsymbol{R}_2 \underset{Def}{\Leftrightarrow} \tilde{\sigma}(\boldsymbol{R}_1) = \tilde{\sigma}(\boldsymbol{R}_2).$$

Для этого отношения можно доказать следующую теорему.

Теорема 4. Отношение σ является конгруэнцией на полукольце $\langle \mathfrak{A}, +, \bullet \rangle$.

Таким образом, с практической точки зрения риски и их части в коммутативной экономике различимы с точностью до конгруэнции σ.

Пользуясь введенными обозначениями можно определить два вида вычетов: наименьший (простейший) вычет:

$$\left|\boldsymbol{A}\right|_{\kappa} \underset{Def}{=} \tilde{\kappa}\left(\boldsymbol{A}\right),\ \boldsymbol{A} \in \mathfrak{A},$$

и значимый вычет:

$$\left|\boldsymbol{A}\right|_{\sigma} \underset{Def}{=} \tilde{\sigma}\left(\boldsymbol{A}\right),\ \boldsymbol{A} \in \mathfrak{A}.$$

Соответственно можно говорить об *арифметиках рисков по модулю* κ и *по модулю* σ. Каждая из этих арифметик позволяет по-своему повысить производительность вычислений при прямом вычислении рисков дискретных систем. Естественно возникает вопрос: Можно ли совместить преимущества, предоставляемые каждой из названных арифметических систем?

Можно показать, что ответ на этот вопрос положительный и это связано с результатом, выраженным следующей теоремой.

Теорема 5. Отношение $\kappa \cdot \sigma$ является конгруэнцией на полукольце $\left\langle \mathfrak{A}, +, \bullet \right\rangle$.

Результаты теоремы 5 позволяют ввести понятие и естественное обозначение *наименьшего значимого вычета* или *вычета по модулю* $\kappa \cdot \sigma$:

$$\left|\boldsymbol{A}\right|_{\kappa\sigma} \underset{Def}{=} \tilde{\sigma} \circ \tilde{\kappa}\left(\boldsymbol{A}\right),\ \boldsymbol{A} \in \mathfrak{A}.$$

Свойства всех введенных вычетов представляет следующая теорема.

Теорема 6. На коммутативном полукольце с единицей $\left\langle \mathfrak{A}, +, \bullet \right\rangle$ для любых $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathfrak{A}$ выполняются следующие соотношения:

$$\Big|\left|\boldsymbol{A}\right|_{\alpha} + \boldsymbol{B}\Big|_{\alpha} = \Big|\boldsymbol{A} + \left|\boldsymbol{B}\right|_{\alpha}\Big|_{\alpha} = \Big|\left|\boldsymbol{A}\right|_{\alpha} + \left|\boldsymbol{B}\right|_{\alpha}\Big|_{\alpha} = \left|\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}\right|_{\alpha}$$

и

$$\Big|\left|\boldsymbol{A}\right|_{\alpha} \bullet \boldsymbol{B}\Big|_{\alpha} = \Big|\boldsymbol{A} \bullet \left|\boldsymbol{B}\right|_{\alpha}\Big|_{\alpha} = \Big|\left|\boldsymbol{A}\right|_{\alpha} \bullet \left|\boldsymbol{B}\right|_{\alpha}\Big|_{\alpha} = \left|\boldsymbol{A} \bullet \boldsymbol{B}\right|_{\alpha},$$

где $\alpha \in \left\{\kappa, \sigma, \kappa\sigma\right\}$.

Использование перечисленных в теореме 6 свойств вычетов при компьютерном моделировании позволяет (иногда существенно) повысить эффективность прямых вычислений риска. Соответствующие результаты были продемонстрированы при использовании пакета прикладных программ «МультиМИР» [15] как при анализе финансовых рисков [5] и рисков управления персоналом [4; 10], так и в технико-экономическом обосновании инфраструктурных решений [1; 7; 9].

Список литературы

1. Антонов В.М. Инновационные подходы к развитию техники и технологий / В.М. Антонов, А.В. Бородин, Ю.А. Ипатов [и др.]. – Кн. 1. – Одесса: Куприенко СВ, 2015. – 172 с.

2. Бородин А.В. Архитектура информационной системы поддержки принятия решений по управлению персоналом розничной подсистемы коммерческого банка / А.В. Бородин // Программные системы и вычислительные методы. – 2014. – №2. – С. 174–190. – DOI: 10.7256/2305–6061.2014.2.12331.

3. Бородин А.В. Математические модели управления кредитным портфелем коммерческого банка / А.В. Бородин. – Йошкар-Ола: Марийский государственный технический университет, 1998. – 168 с.

4. Бородин А.В. Модели управления персоналом в розничной подсистеме коммерческого банка / А.В. Бородин // Экономика и социум: современные модели развития общества в аспекте глобализации: Материалы III международной научно-практической конференции (12 февраля 2014 г.). – Саратов: ЦПМ «Академия Бизнеса», 2014. – С. 26–31.

5. Бородин А.В. Модель ценообразования на рынке розничных ссудных продуктов коммерческого банка / А.В. Бородин // Экономика. Теория и практика: Материалы IV международной научно-практической конференции (17 декабря 2015 г.). – Саратов: ЦПМ «Академия Бизнеса», 2015. – С. 46–49.

6. Бородин А.В. Об отдельных аспектах применения методологии Монте-Карло в оценке риска кредитного портфеля в среде Microsoft Office / А.В. Бородин // Экономика. Теория и практика: материалы международной научно-практической конференции (13 августа 2014 г.). – Саратов: ЦПМ «Академия Бизнеса», 2014. – С. 22–36.

7. Бородин А.В. Реконструкция и исследование датчика псевдослучайных чисел в VBA-подсистеме Microsoft Office / А.В. Бородин // NB: Кибернетика и программирование. – 2014. – №4. – С. 14–45. – DOI: 10.7256/2306–4196.2014.4.12648.

8. Бородин А.В. Сети Петри с нечетким поведением в задачах имитационного моделирования эволюции инвестиционных и страховых портфелей / А.В. Бородин // Обозрение прикладной и промышленной математики. – 2000. – Т. 7. – В. 2. – С. 321–322.

9. Бородин А.В. Стохастическое моделирование в задачах синтеза оптимальных топологий сетей дистрибуции точного времени / А.В. Бородин, Д.Р. Зубьяк // Технические науки – от теории к практике. – 2014. – №34. – С. 7–15.

10. Бородин А.В. Управление HR-процессом в коммерческом банке на основе технологий имитационного моделирования / А.В. Бородин // Технические науки – от теории к практике. – №32. – Новосибирск: Ассоциация научных сотрудников «Сибирская академическая книга», 2014. – С. 7–14.

11. Клиффорд А. Алгебраическая теория полугрупп / А. Клиффорд, Г. Престон. – Т. 1. – М.: Мир, 1972. – 285 с.

12. Тарасов В.В. Научные ответы на вызовы современности: техника и технологии / В.В. Тарасов, Г.П. Кича, А.В. Куликов [и др.]. – Кн. 1. – Одесса: Куприенко СВ, 2016. – 177 с.

13. Уразаева Т.А. Алгебра рисков: теория и алгоритмы / Т.А. Уразаева. – Йошкар-Ола: Поволжский государственный технологический университет, 2013. – 208 с.

14. Уразаева Т.А. Модели риска в технико-экономическом обосновании инфраструктурных решений / Т.А. Уразаева // Современные проблемы и перспективы социально-экономического развития предприятий, отраслей, регионов: Сборник статей. – Йошкар-Ола: Поволжский государственный технологический университет, 2015. – С. 161–164.

15. Уразаева Т.А. О функциональности пакета прикладных программ «МультиМИР» / Т.А. Уразаева // Современные проблемы и перспективы социально-экономического развития предприятий, отраслей, регионов. – Йошкар-Ола: Поволжский государственный технологический университет, 2014. – С. 261–265.