Альбрант Евгений Олегович
учитель информатики
МБОУ «СОШ №1»
г. Абакан, Республика Хакасия

DOI 10.21661/r-114007

ПРИЁМЫ БЫСТРОГО РЕШЕНИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ ЗАДАЧ ПО ИНФОРМАТИКЕ

Аннотация*: в статье описываются некоторые приёмы, позволяющие школьнику решать сложные (на первый взгляд) задачи по информатике не только без использования калькулятора, но даже без выполнения сложных математических расчётов, что позволяет в разы сократить время, отводимое на решение подобных задач на Едином государственном экзамене.*

Ключевые слова*: вычисления, степени двойки, комбинаторика, формулы.*

Требования к единому государственному экзамену по информатике однозначно предписывают запрет для ученика на использование калькулятора и других подручных вычислительных средств при решении задач. Этим же требованием руководствуется учитель и при проведении разного рода проверочных и контрольных работ в классе. Зачастую это вызывает негодование школьников, которые считают, что многие из предлагаемых примеров решаются довольно долго, если производить вычисления вручную, на бумаге. На самом же деле подавляющее большинство задач при правильном подходе можно решать не только без калькулятора, но даже без громоздких вспомогательных расчётов. Зная некоторые несложные правила и математические законы, решить такие задачи можно за считанные минуты. Попробуем разобрать примеры из разных разделов информатики.

1. Системы счисления.

Сколько единиц в двоичной записи числа 503?

Не все знают, что для перевода числа из десятичной в двоичную систему счисления существует два способа. Один предполагает последовательное деление числа на основание системы счисления и выписывание остатков. Другой способ можно применить, если ученик хорошо знаком с таблицей степеней двойки. Кстати, такую таблицу не обязательно держать в голове, ведь её довольно несложно построить по ходу решения.

Итак, для решения поставленной задачи нам потребуется знать степени двойки до 2^8. Первое, что необходимо сделать – разложить число 501 на сумму чисел, являющихся степенями двойки.

$$2^0 = 1$$

$$2^1 = 2$$

$$2^2 = 4$$

$$2^3 = 8$$

$$2^4 = 16$$

$$2^5 = 32$$

$$2^6 = 64$$

$$2^7 = 128$$

$$2^8 = 256$$

501 = 256 + 128 + 64 + 32 + 16 + 4 + 1 или $503 = 2^8 + 2^7 + 2^6 + 2^5 + 2^4 + 2^2 + 2^0$

Теперь запишем степенной ряд, в котором будут присутствовать цифры от 0 до 8, то есть до максимальной степени, которая встретилась в нашей сумме. Цифры следует записать справа налево, оставив под ними пустые клетки

8	*7*	*6*	*5*	*4*	*3*	*2*	*1*	*0*

А теперь заполним пустые клетки под степенным рядом: поставим единицу под той цифрой (степенью), которая встретилась в нашей сумме. В нашем сумме встретились следующие степени двойки: 8, 7, 6, 5, 4, 2, 0, Именно под этими цифрами поставим 1, остальные же заполним нулями. Получили число 111110101_2.

8	*7*	*6*	*5*	*4*	*3*	*2*	*1*	*0*
1	1	1	1	1	0	1	0	1

Этот способ позволяет намного быстрее осуществлять перевод больших десятичных чисел в двоичный вид. Нетрудно посчитать, что количество единиц в таком числе равно 7. Более того, мы могли вообще не находить получившееся число! В задаче спрашивалось: сколько единиц содержится в двоичной записи числа, само число искать не требовалось! А единиц там ровно столько, сколько слагаемых получилось, когда мы разложили число 501 на сумму степеней двойки.

Сколько существует натуральных чисел x, для которых выполнено неравенство $11011100_2 < x < DF_{16}$*?*

Ученик, недостаточно подкованный в системах счисления, начнёт переводить оба числа в десятичный вид, чтобы произвести операции сравнения в привычной для нас форме. Но оказывается, шестнадцатеричные числа (как и восьмеричные) можно очень быстро перевести в двоичные. Этой возможностью мы и воспользуемся.

Конечно, для решения задачи нужны некоторые первоначальные знания. Например, неплохо было бы заучить таблицу соответствия шестнадцатеричных, десятичных и двоичных цифр. Но сделать это можно и в процессе решения задачи.

10	*16*	*8*	*2*
0	0	0	0000
1	1	1	0001
2	2	2	0010
3	3	3	0011
4	4	4	0100
5	5	5	0101
6	6	6	0110
7	7	7	0111
8	8	10	1000
9	9	11	1001
10	A	12	1010
11	B	13	1011
12	C	14	1100

13	D	15	1101
14	E	16	1110
15	F	17	1111

Чтобы перевести шестнадцатеричное число в двоичное, нужно каждую цифру этого числа записать в двоичном виде по отдельности. Полученные двоичное число обязательно должно быть четырехзначным. Если оно таковым не является, слева необходимо дописать недостающие нули. (для перевода из восьмеричной системы счисления в двоичную правила почти такие же, но каждое восьмеричное число должно превратиться в *трехзначный* двоичный эквивалент).

$$D_{16} = 13_{10} = 1101_{2,}\ F_{16} = 15_{10} = 1111_2$$

Итак, из числа DF_{16} мы получаем число 11011111_2. Вычтем из большего числа меньшее (в двоичном виде):

$$\_11011111_2$$

$$\mathit{11011100_2}$$

$$00000011_2$$

Нетрудно понять, что большее число отличается от меньшего на 11_2, то есть на 3. А значит между ними есть 2 натуральных числа.

2. Кодирование графической и звуковой информации.

Для хранения произвольного растрового изображения размером 1024×1024 пикселей отведено 512 Кбайт памяти, при этом для каждого пикселя хранится двоичное число – код цвета этого пикселя. Для каждого пикселя для хранения кода выделено одинаковое количество бит. Сжатие данных не производится. Какое максимальное количество цветов можно использовать в изображении?

Как известно, объём памяти, занимаемый изображением, находится по следующей формуле: $V = a * b * i$, где $a *$ b – разрешение изображения, i – глубина кодирования, то есть количество бит, которое отводится для хранения одного пикселя. От этого зависит количество цветов, которые может принимать пиксель. Найти это количество можно по формуле $N = 2^i$, где N – количество возможных цветов, i – количество бит, отводимых на один пиксель.

Выполним два действия:

1. Найдём, сколько бит отводится на один пиксель. Необходимо помнить, что 1 Кбайт = 1024 байта, а 1 байт = 8 бит

$$i = \frac{V}{a * b} = \frac{512 \text{ Кбайт}}{1024 * 1024} = \frac{512 * 1024 \text{ байт}}{1024 * 1024} = \frac{512 \text{ байт}}{1024} = 0{,}5 \text{ байт} = 4 \text{ бит}$$

2. Найдём количество возможных цветов, которое можно использовать в изображении: $N = 2^i = 2^4 = 16$

Запись цифрового аудиофайла, записанного в режиме стерео, занимают на диске 11 Мб. Частота дискретизации – 22 КГц. Какова разрядность аудиоадаптера, если известно, что длина записи 2 минуты 8 секунд?

Объём звукового файла находится по формуле: $V = \vartheta * p * t * k$, где ϑ – частота дискретизации звука в Гц (1/с); p – разрядность (или глубина) кодирования, обычно выражается в битах; t – время звучания в секундах, k – количество аудиоканалов. В нашем случае k = 2, так как известно, что запись была сделана в режиме стерео.

Отсюда нетрудно выразить разрядность $p = \frac{V}{\vartheta * t * k}$

Произведём некоторые преобразования, при этом постараемся по возможности использовать степени двойки при расчётах, после чего подставим получившиеся числа в вышеуказанную формулу:

1. Время переведём в секунды: 2 мин 8 сек. = 128 секунд = 2^7секунд

2. Объём файла переведём в биты: 11 Мбайт = $11*2^{20}$ байт = $11*2^{23}$ бит

3. Частоту дискретизации представим как произведение: 22 КГц = 22000 Гц = 11*2*1000 Гц = 11 * 2 * 2 * 2 * 2 * 125 Гц = 11 * 2^4 * 125 Гц (1/с)

4. Подставим получившиеся числа в формулу:

$$p = \frac{V}{\vartheta * t * k} = \frac{11 * 2^{23} \text{бит}}{11 * 2^4 * 125 \frac{1}{\text{с}} * 2^7 \text{с} * 2}$$

5. Сократим единицы измерения (секунды), а также степени двойки. Помним, что $\frac{2^a}{2^b * 2^c} = 2^{(a-(b+c))}$

6. Получаем: $p = \frac{11*2^{23}\text{бит}}{11*2^4*125\frac{1}{\text{с}}*2^7\text{с}*2} = \frac{11*2^{23}\text{бит}}{11*125*2^{12}} = \frac{2^{23}}{125*2^{12}} = \frac{2^{11}\text{бит}}{125}$

7. Одна маленькая хитрость! Зачастую в задачах, связанных с кодированием звука, мы не сможем получить абсолютно точное число. Всегда требуются небольшие округления. Мы могли бы разделить 2048 (то есть 2^{11}) на 125, округлив результат до ближайшего целого числа. А могли бы заметить, что $125 \approx 128 = 2^7$. Тогда наши расчёты становятся ещё проще: $\frac{2^{11}\text{бит}}{125} \approx \frac{2^{11}\text{бит}}{2^7} = 2^4 \text{ бит} = 16 \text{ бит}$

3. Элементы комбинаторики.

Вася составляет 5-буквенные слова, в которых встречаются только буквы А, Б, В, Г, причём буква А появляется ровно 1 раз. Каждая из других допустимых букв может встречаться в слове любое количество раз или не встречаться совсем. Словом считается любая допустимая последовательность букв, не обязательно осмысленная. Сколько существует таких слов, которые может написать Вася?

Для решения задачи нужно знать: если у нас есть n букв для составления слов, и каждое слово может состоять из s букв, то всего возможно n^s слов.

Как может повлиять на решение задачи фраза «буква А появляется только 1 раз»? Это значит, что мы имеем 5 вариантов (когда буква А стоит на одном из возможных 5 мест в слове), в которых можно сгенерировать слова из оставшихся 3х букв (Б, В, Г), которые можно поставить на одно из 4х оставшихся мест (слово должно быть 5-буквенным, но одну букву уже занимает А), то есть 5 вариантов по 3^4 комбинаций.

Наш ответ: $3^4 * 5 = (3^2)^2 * 5 = 9^2 * 5 = 81 * 5 = 405$.

Слово «информатика» разрезали на буквы, выбросив все буквы, встречающиеся больше 1 раза. Из оставшихся букв стали составлять четырехбуквенные слова. Словом, можно считать любой набор из четырех букв, не обязательно имеющих какой-то смысл или согласующихся с правилами русского языка. Сколько таких слов можно составить?

После того, как мы избавились от повторяющихся букв, наш набор составляет 9 букв: И, Н, Ф, О, Р, М, А, Т, К. Из этих букв мы будем составлять всевозможные комбинации по 4 буквы. Ученику следует знать одно очень важное определение и связанную с ним формулу:

Размещением из n элементов по m в комбинаторике называется любой *упорядоченный набор* из m различных элементов, выбранных из генеральной совокупности в n элементов.

Число размещений обозначается как A_n^m и находится следующим образом:

$$A_n^m = n(n\text{-}1)(n\text{-}2)\ldots(n\text{-}m+1) = \frac{n!}{(n\text{-}m)!}$$

Для нашей задачи получаем: $A_9^4 = \frac{9!}{(9-4)!} = \frac{9!}{5!} = \frac{9*8*7*6*5*4*3*2*1}{5*4*3*2*1} = 9*8*7*6 = 72*42 = 70*42+2*42 = 2940+84 = 3024$

Последняя задача особенно показательна с точки зрения умения произвести вычисления без использования калькулятора. Как можно было заметить, для решения всех приведённых выше задач калькулятор даже не потребовался. Конечно, навык в упрощении выражений должен быть получен школьником из курса математики. И мы убедились, что при грамотном использовании этого навыка решению поддаются даже очень непростые задачи.