Криволапов Сергей Яковлевич
канд. физ.-мат. наук, доцент
ФГОБУ ВО «Финансовый университет
при Правительстве Российской Федерации»
г. Москва

РЕГИСТРАЦИЯ СООБЩЕНИЙ СЛУЧАЙНОЙ ДЛИТЕЛЬНОСТИ

Аннотация*: для пуассоновского потока событий решается задача нахождения режима регистрации, обеспечивающего максимальное значение среднего числа зарегистрированных сообщений.*

Ключевые слова*: пуассоновский поток событий, регистрация сообщений.*

Рассматриваются сообщения, появляющиеся в интервале времени [0; T]. Моменты появления сообщений образуют пуассоновский поток событий с плотностью λ. Длина сообщения случайна и имеет экспоненциальное распределение с параметром μ. Задается следующий режим регистрации сообщений. Наблюдение ведется в течение отрезков времени $[t_1; t_1 + l_1]$; $[t_2; t_2 + l_2]$; …; $[t_m; t_m + l_m]$. Через b_i обозначим промежуток времени после окончания (i-1)-го наблюдения и до начала следующего i-го наблюдения: $b_1 = t_1$; $b_i = t_i$-$t_{i\text{-}1}$-$l_{i\text{-}1}$; $i = 2, \dots, m$. Предполагается, что выполняется условие: $\sum_{i=1}^{m} l_i = L$, где L – некоторая заданная константа.

Сообщение считается зарегистрированным, если оно наблюдается в течение времени, превосходящем величину $c = 1/\mu$ ($1/\mu$ – это математическое ожидание случайной длины сообщения).

Требуется так выбрать величины m, b_i, l_i, ; $i = 1, \dots, m$., чтобы математическое ожидание числа зарегистрированных сообщений было максимальным.

Рассмотрим сообщение с началом в точке t и длиной s. Через $\psi_s(t)$ обозначим наблюдаемую часть сообщения. Вероятность того, что сообщение будет зарегистрировано, есть вероятность того, что $\psi_s(t) > c$. Пусть $G(s,t)$ – множество таких

s, что $\psi_s(t) > c$. Так как длина сообщения s имеет экспоненциальное распределение с плотностью $f(x) = \mu\exp(-\mu x)$, то вероятность p события $\{\psi_s(t) > c\}$ имеет вид:

$$p = \int_{G(s,t)} f(s)ds.$$

Пусть ξ – число зарегистрированных сообщений на отрезке $[0;T]$.

Из свойств пуассоновского потока сообщений [1], следует справедливость следующего соотношения:

$$E(\xi) = \lambda \int_0^T dt \int_{G(s,t)} f(s)ds$$

Введем обозначение: $a_i = t_i + l_i - c_i$, $i = 1, \dots, m$.

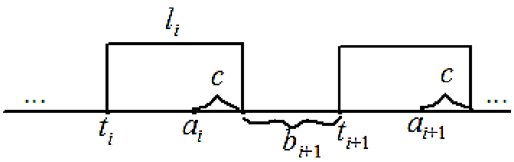

Рис. 1

Пусть $F(x)$ функция распределения случайной величины ξ. Для математического ожидания $E(\xi)$ выполняется следующее соотношение:

$$E(\xi) = K + \lambda c F(c) m - \lambda \sum_{i=1}^{m-1} \int_0^{b_{i+1}+2c} F(x)dx$$

Здесь через K обозначены слагаемые, не зависящие от m, b_i и l_i.

Из полученного выражения видим, что величины l_i в пределах поставленных ограничений можно выбирать произвольно.

Применение метода неопределенных множителей Лагранжа [2] показывает, что максимум $E(\xi)$ в предположении, что m фиксировано, достигается при значениях величин b_i, равных между собой: $b_i = (T-L)/m$, $i = 2, \dots, m$. Тогда

$$E(\xi) = K + \lambda c F(c) m - \lambda m \sum_{i=1}^{m-1} \int_0^{2c+(T-L)/m} F(x)dx.$$

Взяв производную по переменной m убеждаемся, что $\frac{dE}{dm} < 0$, следовательно, максимальное значение достигается при наименьшем возможном значении числа наблюдений $m = 1$.

Итак, оптимальным режимом наблюдения является режим, при котором наблюдение ведется непрерывно в течение всего выделенного на поиск времени.

Список литературы

1. Волков И.К. Случайные процессы: Учеб. для вузов / И.К. Волков, С.М. Зуев, Г.М. Цветкова; под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. – М.: Изд-во МГТУ им. Баумана, 2000.

2. Солодовников А.С. Математика в экономике: Учебник: В 2-х ч. Ч. 2 / А.С. Солодовников, В.А. Бабайцев, А.В. Браилов, И.Г. Шандра. – М.: Финансы и статистика, 2012.