Рахманова Мария Васильевна
студентка
Закирова Нурия Музиповна
канд. техн. наук, доцент
ФГБОУ ВО «Глазовский государственный педагогический институт им. В.Г. Короленко»
г. Глазов, Удмуртская Республика

ИЗУЧЕНИЕ КВАДРАТУРНЫХ ФОРМУЛ В РАЗДЕЛЕ «ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ» СТУДЕНТАМИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА

Аннотация*: в статье рассматриваются различные подходы к реализации квадратурных формул. Приведены квадратурные формулы Ньютона – Котеса, Чебышева, Гаусса. Проведен сравнительный анализ вычисления одного и того же интеграла различными способами.*

Ключевые слова*: квадратурные формулы, формулы Ньютона – Котеса, формулы Чебышева, формулы Гаусса, оценка погрешности.*

Численное интегрирование на практике играет важную роль, в силу того, что к ней сводится целый ряд задач различных областей знаний. Основная идея этих методов – это аппроксимация исходной задачи другой. При изучении соответствующей темы студентами математического факультета особый интерес вызывает рассмотрение разных по существу подходов к выводу квадратурных формул.

Вывод квадратурных формул Ньютона-Котеса $\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} A_i f(x_i)$ основывается на замене подынтегральной функции интерполяционным многочленом Лагранжа. Здесь x_i- узлы, A_i – коэффициенты квадратурной формулы. При различных значениях n получаются частные случаи, такие как формула трапеций, формула Симпсона. Квадратурные формулы Чебышева реализуются иным способом: полагается все $A_i = \frac{b\text{-}a}{n} = cons$, узлы определяются с условием, что квадратурные формулы будут точно интегрируемы многочленами степени n-1. Такие узлы найдены для n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9. Гауссом была поставлена и решена более сильная задача: найти квадратурные формулы, которые за счет выбора узлов и весов точно интегрировали бы многочлены степени 2n-1. Узлы и веса квадратурных формул Чебышева и Гаусса представлены в таблицах в различных пособиях [3, с. 193, с. 219].

Более детально рассмотрим формулы приближенного вычисления определенного интеграла с указанием их погрешностей и приведем пример вычисления одного и того же интеграла по разным квадратурным формулам.

1. Общая формула трапеции:

$$\int_a^b f(x)dx \approx h * \left[\frac{f(x_0)+f(x_n)}{2} + f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_{n\text{-}1})\right],$$

его остаточный член: $R(f) \leq \underset{[a,b]}{max}\left|f^{('')}(x)\right|\frac{(b\text{-}a)h^2}{12}$.

По формуле трапеций вычислим значение интеграла I= $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ для $n = 7$.

$$h = \frac{b\text{-}a}{n} \approx 0{,}143, max|f''(x)| = 2.\ |R_n| \leq 0{,}004.$$

Зная погрешность метода, вычисления можем производить, например, с четырьмя десятичными знаками после запятой и, округлив результат, получим I $= 0.785 \pm 0{,}004$.

2. Общая формула Симпсона имеет вид:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left[f(x_0) + f(x_{2n}) + 2 * \left(f(x_2) + \cdots + f(x_{2n\text{-}2})\right) + 4(f(x_1) + \cdots + f(x_{2n\text{-}1}))\right].$$

Ее остаточный член представляется в виде:

$$R(f) = \underset{[a,b]}{max}\left|f^{(4)}(x)\right|\frac{(b\text{-}a)h^4}{180}, \text{где } h = \frac{(b\text{-}a)}{2n}.$$

С помощью формулы Симпсона вычислим тот же интеграл. произведя разбиение отрезка $[a; b]$ на *чётное* количество *равных* отрезков. Возьмем сначала n=8, тогда $h = \frac{1-0}{8} = 0{,}125$ и получим $I_8 \approx 0{,}785398126$. При n=16 имеем $h = \frac{(b\text{-}a)}{2n} = \frac{1-0}{16} = 0{,}0625$ и $I_{16} \approx 0{,}7853981$.

Найдем $|I_{16}\text{-}I_8| \approx |0{,}785398163 - 0{,}785398126| = 0{,}000000037$. На практике совпавшие десятичные знаки считают верными, поэтому $I \approx 0{,}785398$.

3. Формула Чебышева:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b\text{-}a}{n}[f(X_1) + f(X_2) + \ \dots + f(X_n)],$$

где $X_1, \dots, X_n$- узлы квадратурных формул Чебышева.

Оценка погрешности:$R_n(f) = M_n f^{(m+1)}(\xi)$, здесь M не зависит от вида функции f(x),

$$M_n = \frac{2}{(m+1)!}\left[\frac{1}{m+2} \text{-} \frac{1}{n}\sum_{k+1}^{n} x_k^{m+1}\right] \text{ [2, с.89].}$$

Рассмотрим задачу вычисление того же интеграла по формуле Чебышева при n = 7.

Чтобы применить формулу $\int_{-1}^{1}\varphi(t)dt \approx \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\varphi(t_i)$, надо представить данный интеграл в виде: $I = 2\int_{-1}^{1}\frac{dx}{4+(1+x)^2}$, сделав замену переменной $x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}t$. Используя таблицу для 7 узлов формулы Чебышева и найдя значения функции в них, получим: I≈0,785400.

Сравнив результат с значением $\int_0^1 \frac{\mathrm{dx}}{1+\mathrm{x}^2} = arctg\frac{\pi}{4} = 0{,}7853981 \dots$, видим, что ошибка не превышает двух единиц шестого знака.

4. Формула Гаусса: $I \approx [A_1 f(t_1) + A_2 f(t_2) + A_3 f(t_3) + \cdots + A_n f(t_n)]$, где t_i узлы квадратурных формул Гаусса, которые являются корнями многочленов Лежандра, A_i- его коэффициенты. Остаточный член формулы Гаусса с n узлами определяется следующим образом:

$$R_n = \frac{(b\text{-}a)^{2n+1}(n!)^4 f^{(2n)}(\xi)}{[(2n)!]^3(2n+1)} \ [1, \text{с}. 106].$$

Вычислим тот же интеграл по формуле Гаусса при n=5, предварительно сделав замену переменной и записав исходный интеграл как в предыдущем случае.

По таблице1 узлов, весов и значений подынтегральной функции в узлах найдем $I \approx [A_1 f(t_1) + A_2 f(t_2) + A_3 f(t_3) + A_4 f(t_4) + A_5 f(t_5)] = 0{,}78539816$.

Сравнив с точным значением $I = \frac{\pi}{4} = 0{,}785398163 \ldots$, видим, что в полученном результате верны все восемь знаков. Итак, $I = \frac{\pi}{4} \approx 0{,}785398163$.

Таблица 1

i	t_i	$f(t_i)$	A_i
1	–0,906179846	0,24945107	0,236926885
2	–0,538469310	0,23735995	0,478628670
3	0	0,2	0,568888889
4	0,538469310	0,15706261	0,478628670
5	0,906179846	0,13100114	0,236926885

При численном интегрировании можно считать, что та из формул лучше, которая дает ответ с нужной точностью при наименьшей затрате труда и времени. Если вычисления ведутся вручную, то чаще всего применяется формула Симпсона, реже в этих случаях используют формулы Гаусса и Чебышева, так как вычисления с многозначными коэффициентами и узлами затруднительны. Наконец укажем, что многочленная точность квадратурной формулы Чебышева и Ньютона-Котеса равна $(n\text{-}1)$ при заданных n значениях аргумента, а порядок точности метода Гаусса равен $(2n\text{-}1)$, при тех же n узлах.

Список литературы

1. Бахвалов Н.С. Численные методы: Учеб. пособие для студентов физ.-мат. специальностей вузов / Н.С. Бахвалов, Н.П. Жидков, Г.М. Кобельков; Моск. гос. ун-т им. М.В. Ломоносова. – М.: Бином; Лаб. знаний, 2004. – 636 с.

2. Копченова, Н.В. Вычислительная математика в примерах и задачах / Н.В. Копченова, И.А. Марон. – М.: Наука, 1972. – 366 с.

3. Мысовских И.П. Лекции по методам вычислений / И.П. Мысовских. – М.: Физматгиз, 1962. – 344 с.