

**Кетов Антон Викторович**

канд. техн. наук, доцент

ФГБОУ ВО «Дальневосточный государственный

университет путей сообщения»

г. Хабаровск, Хабаровский край

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧИ

*Аннотация:* в данной статье исследователем излагается описание и результаты применения численного итерационного метода при моделировании сложных контактных задач.

**Ключевые слова:** контактная задача, итерационный процесс.

В итерационном процессе решения прямой конструкционно-контактной задачи для относительного сближения деформируемых тел при их вращении предлагается для уточнения величины  $F_i$  во всех итерациях внутреннего цикла использовать выражение, удовлетворяющее условию равновесия сил, вида:

$$F_{i,k+1} = f_i T / \sum_{i=1}^n (F_i r_i), \quad (i = 1, \dots, n), \quad (1)$$

где  $F_{i,k+1}$  – уточненное значение силы  $F_{i,k}$ ;  $k$  – порядковый номер итерации;  $f_i$  – величина, обеспечивающая выполнение условий совместности перемещений в ходе итерационного процесса, простейшее выражение для которой:

$$f_i = F_{i,k} r_i / (\Delta_i + W_i), \quad (i=1, \dots, n). \quad (2)$$

Увеличить скорость сходимости итерационного процесса можно, если использовать вместо (2) выражения

$$f_i = F_{i,k} - K_y E_i / \sum_{i=1}^n K_{ji}, \quad (i=1, \dots, n), \quad (3)$$

$$f_i = [(F_{i,k} + K_y \delta_i / K_{ii}) \gamma r_i / (\delta_i + W_i)] - K_y \delta_i / K_{ii}, \quad (4)$$

где  $K_y$  – ускоряющий коэффициент,  $K_y > 0$ ;  $E_i$  – невязка перемещений;

$E_i = \delta_i + W_i - \gamma r_i$ ;  $K_{ji}$  – коэффициент влияния силы  $F_i$  на сумму деформаций поверхностей в расчетной точке  $j$ -го участка;  $\gamma$  – величина углового сближения деформируемых тел,  $\gamma = (1/n) \sum_{i=1}^n [(\delta_i + W_i) / r_i]$ .

При использовании (3) или (4) значение  $K_y$  выбирается таким, чтобы на каждой последующей итерации для большинства участков невязка  $E_i$  меняла знак, а после каждой пары итераций *дополнительно* уточняется значение  $F_i$  для тех участков, на которых величина  $E_i$  изменила знак, путем линейной интерполяции по формуле:

$$F_i = (E_{i1}F_{i2} - E_{i2}F_{i1}) / (E_{i1} - E_{i2}), \quad (5)$$

где индексы 1 и 2 указывают порядковый номер итерации в паре. Затем производится нормировка с целью выполнения условий равновесия сил, для чего используется выражение (1) при  $f_i = F_i$ ; после чего итерации повторяются.

Для частного случая (относительное сближение деформируемых тел при их поступательном движении) выражение (1) приобретает вид:

$$F_{i,k+1} = f_i F / \sum_{i=1}^n f_i, \quad (6)$$

где  $F$  – внешняя сжимающая сила;  $f_i$  – величина, обеспечивающая выполнение условий совместности перемещений в ходе итерационного процесса, простейшее выражение для которой вместо (4) имеет вид:

$$f_i = F_{i,k} / (\Delta_i + W_i), \quad (i = 1, \dots, n). \quad (7)$$

Итерационный процесс сходится быстрее, если использовать вместо (7):

$$f_i = F_{i,k} [1 + (\delta_m - \delta_i)(1 + F_{i,k}/F) / (\delta_i - K_{im} F_{i,k})], \quad (8)$$

где  $\delta_i$  – сумма деформаций (от действия сил  $F_i$ ;  $i = 1, \dots, n$ ) поверхностей тел и зазора, существовавшего между ними, на  $i$ -ом участке площадок контакта,  $\delta_i = \Delta_i + W_i$ ;  $\delta_m$  – наибольшая из величин сумм деформаций  $\delta_i$ ;  $K_{im}$  – коэффициент влияния силы, приложенной на  $i$ -ом участке, на сумму деформаций поверхностей тел на  $m$ -ом контактирующем участке.

Аналогично можно получить выражения для  $f_i$  вместо (3) или (4).

При всех вариантах итерационного процесса уточнение границ площадок контакта и числа  $n$  участков, передающих нагрузку, производится во внешних итерациях цикла так же, как в известном методе Г.И. Шевелёвой [1, с. 90–94]. В качестве начального приближения можно принимать, например, распределение контактного давления по решению Герца или равномерное.

Преимущества описанного численного итерационного метода:

– можно уменьшить затраты машинного времени и памяти ЭВМ при решении сложных контактных задач, повысить точность дискретного решения;

– можно (см. (2) использовать при *нелинейной* зависимости деформаций от сил.

Предложенные варианты итерационного процесса *пригодны* для расчетов в случаях сложных конструкционно-контактных задач, например, при расчетах распределения нагрузки в зубчатых (в том числе пространственных) передачах с учетом местных (контактных) и общих (изгибно-сдвиговых) деформаций зубьев, и показали высокую эффективность в практических расчетах.

Ниже приведены результаты математического моделирования (с использованием этого численного итерационного процесса) контактной задачи для круговинтовых поверхностей зубьев в цилиндрической зубчатой передаче Новикова и сопоставления их с экспериментальными данными А.С. Яковлева и В.И. Печеного [2, с. 1–7]. При математическом моделировании исходные данные (параметры зубьев, материала и т. д.) соответствовали условиям эксперимента.

Таблица 1

## Сравнение результатов моделирования и эксперимента [2]

Угол контакта, градусы	Расстояние вдоль зуба, мм																данные экс-				
	110	120	130	140	150	160	170	180	190	200	210	220	230	240	250	260		270	280	290	300
	Контактное давление (МПа) по экспериментальным данным [2, с.1–7] (знаком $x$ отмечены точки, в которых не удалось измерить величину давления)																				
35								3,9	5,4	5,9	5,4	3,9									
30						1,5	4,9	6,6	8,5	9,8	10	9,6	8,0	5,9	1,5						
25					2,6	5,9	8,3	9,8	11	10,3	9,8	8,5	6,9	5,6	3,7						
20				4,1	6,6	8,0	8,8	9,3	9,8	9,8	9,8	9,8	9,3	8,5	7,6	5,9					

17			2,9	5,1	6,9	7,8	8,6	9,0	9,5	9,8	9,8	9,5	9,3	8,3	6,9	4,9	2,45			
14			3,9	5,4	6,1	6,9	7,8	7,8	7,8	7,8	7,8	7,55	7,35	6,9	5,9	5,4	3,9	2,45		
12		2,0	4,9	6,7	7,65	7,65	7,55	7,1	6,9	6,6	6,6	6,6	6,6	6,9	7,8	7,8	7,1	5,4		
9		3,7	6,4	6,4	6,9	6,9	5,9	5,4	4,9	4,9	4,9	x	x	x	x	x	x	x		
8		4,4	6,4	6,4	5,9	5,4	2,9	2,0	2,0	2,0	4,9	6,1	6,4	6,4	6,4	6,2	6,1	5,9	3,9	
6		4,9	5,9	5,9	5,4	2,45			2,0	4,4	5,9	x	x	x	x	x	x	x		
Контактное давление (МПа) по результатам моделирования																				
34,67								3,9	5,9	6,8	6,8	5,8	4,1							
29,82						2,6	5,5	6,9	7,6	7,9	8,0	7,6	6,8	5,5	2,5					
25					3,4	6,1	7,5	8,2	8,6	8,8	8,7	8,5	7,9	7,0	5,9	3,2				
20,18				4,4	6,4	7,5	8,1	8,5	8,7	8,75	8,65	8,5	8,3	7,9	7,2	5,8	3,5			
15,33			4,2	6,1	7,0	7,5	7,8	7,95	8,0	7,95	7,9	7,8	7,7	7,3	7,1	6,6	5,8	4,0		
10,40	2,6	5,3	6,3	6,8	7,0	6,9	6,7	6,4	6,0	5,7	5,6	5,6	5,6	6,1	6,4	7,2	7,8	8,1	6,6	4,1
5,37	2,0	6,4	8,6	6,6	4,8	3,1	1,8													

моделирование

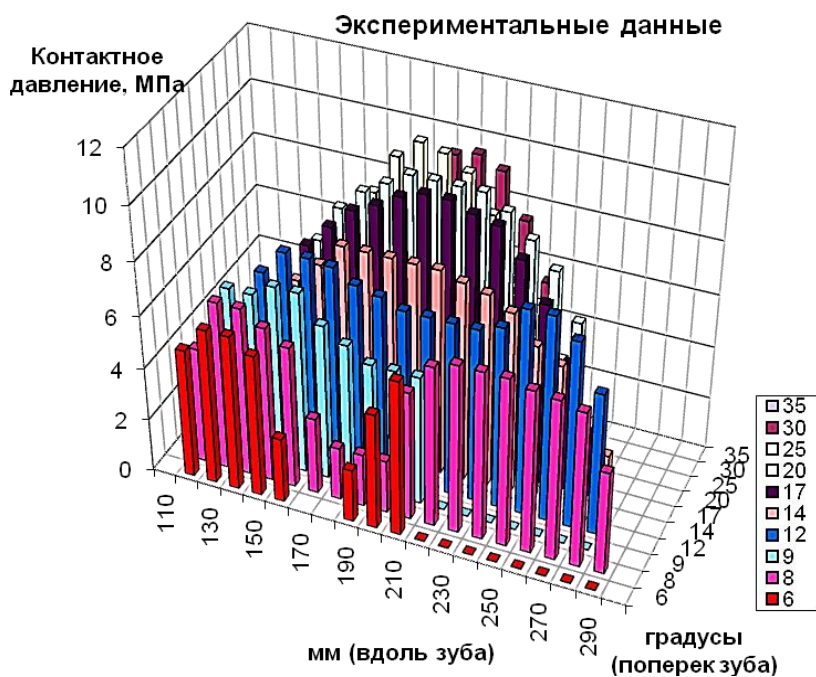


Рис. 1. Данные эксперимента [2, с. 1–7]

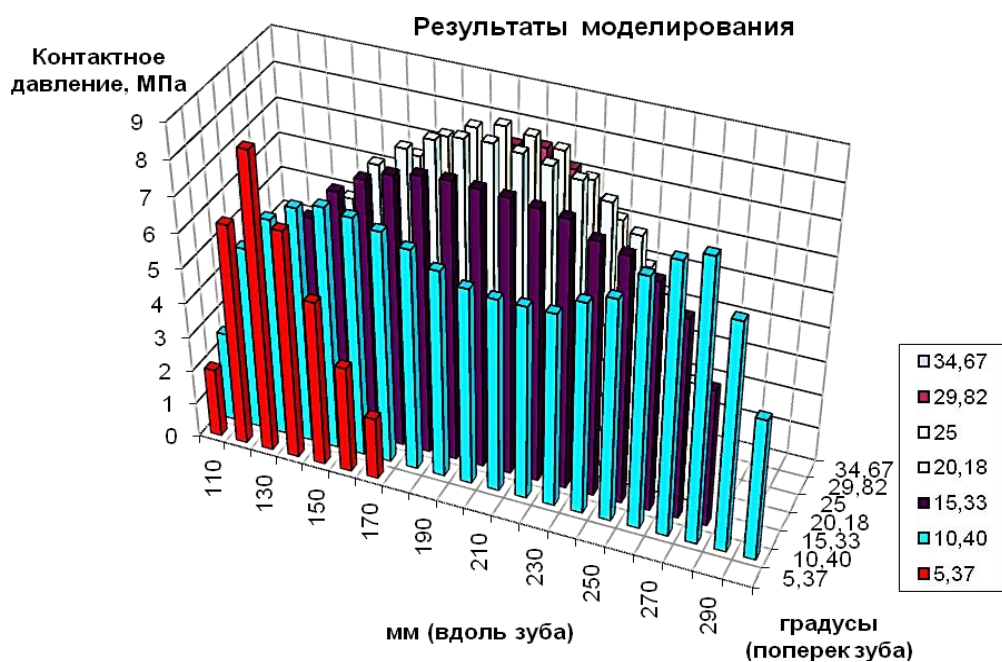


Рис. 2. Результаты моделирования

### Список литературы

1. Шевелёва Г.И. Численный метод решения контактной задачи при сжатии упругих тел [Текст] / Г.И. Шевелёва // Машиноведение. – 1981. – №5. – С. 90–94.
2. Яковлев А.С. Экспериментальное исследование распределения нагрузки по площадке контакта зубьев в передаче Новикова [Текст] / А.С. Яковлев, В.И. Печеный // Надежность и качество зубчатых передач. №18–67–36. – М.: НИИинформтяжмаш, 1967. – С. 1–7.