(cc) BY

Селезнев Евгений Игоревич
студент
Жмыхов Максим Эдуардович
студент
Бабаскина Анастасия Александровна
студентка
ФГБОУ ВО «Юго-Западный государственный университет»
г. Курск, Курская область

ПРОБЛЕМА ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЧИСЕЛ В МАТЕМАТИКЕ: ДИАХРОНИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Аннотация*: в данной статье рассмотрена проблема определения чисел. Отражено определение понятия числа со времен Евклида до Новейшего времени. Отмечен смысл, придаваемый понятию числа в современной математике. Представлены задачи, возникающие в связи с разным пониманием чисел, а также способы решения этих задач. Приведена классификация разных видов чисел.*

Ключевые слова*: математика, числа, арифметика, дробь.*

В математике нет прямого определения чисел. Есть утверждения о многовековом опыте абстрагирования и обобщений человечества, т.е. это не математические утверждения. Хочется отметить, что понятие о натуральном числе является одним из простейших понятий.

Евклид (III в до н. э.), определял число (натуральное) как «множество, составленное из единиц»; такого рода определения можно найти и во многих нынешних учебниках. Но слово «множество» (или «совокупность» и т. п.) отнюдь не понятнее слова «число» [1].

В математике знание чисел сводится к знанию правил обращения с ними, обеспечивающих выполнение арифметических действий. Понятие о том, что такое сложение, например, возникает из таких простых фактов, что оно не нуждается в определении и не может быть определено формально.

Content is licensed under the Creative Commons Attribution 4.0 license (CC-BY 4.0)

Часто даются определения вроде таких: «сложение есть действие, посредством которого несколько чисел соединяются в одно», или «действие, посредством которого находится, сколько единиц содержится в нескольких числах вместе». Но тот, кто не знал бы, что значит сложить, не знал бы и что такое соединить числа, так что все подобные определения сводятся лишь к замене одних слов другими.

Взамен объяснения смысла сложения дается утверждение, что все это простые факты. Хотя с вопроса именно о таком простом факте и начинается с подачи Лейбница критика Канта [2]. Это как раз по Канту слагаемые «соединяются в одно число» (сумму), как бы сливаясь или синтезируясь в нем, подобно атомам в составе молекулы. Такая поверхностная аналогия не дает реального понимания смысла данного действия. Приведенная цитата в части отсутствия определения, конечно, правильна.

Но утверждение, что действие сложения «не может быть определено формально» никак отсюда не вытекает и остается всего лишь мнением автора. Чем-то вроде «неизвестно, следовательно, невозможно». Простая логическая ошибка.

Любой автор, пытающийся рассуждать на тему «Что такое число?», вынужден сразу же уходить от прямого ответа.

Когда школьник впервые знакомится с математикой, ему говорят, что это – наука о числах и геометрических фигурах. Вузовский курс математики обычно начинается с аналитической геометрии, основная цель которой – выразить геометрические понятия на языке чисел. Таким образом, получается, что числа – это единственный предмет изучения в математике.

Правда, если вы откроете современный научный журнал и попробуете прочитать какую-нибудь статью по математике, то вполне вероятно, что вы не встретите в этой статье ни одного числа «в чистом виде». Вместо них речь идет о множествах, функциях, операторах, категориях, мотивах и т. д. Однако, во-первых, почти все эти понятия, так или иначе опираются на понятие числа, а, во-вторых, конечный результат любой математической теории, как правило, выражается на языке чисел.

Содержимое доступно по лицензии Creative Commons Attribution 4.0 license (CC-BY 4.0)

Разумеется, одно только описание исторического развития понятия числа или обсуждение его философского смысла требует много времени и места. Наша цель более упрощена и конкретна – показать, какой смысл придается понятию числа в современной математике, рассказать о задачах, которые возникают в связи с разным пониманием чисел, и о том, как эти задачи решаются [3].

В XVIII веке математики считали понятие числа совершенно простым и ясным. Они полагали возможным дать общее определение понятия числа, способное быть действенным началом логического развития арифметики любых чисел. Учебники арифметики этого времени часто начинались категорическим утверждением: изучить арифметику может только тот, кто знает, что есть число. Такое утверждение гармонически сочеталось с трактовкой математики как науки о величинах.

В первой половине XVIII века авторы руководств по арифметике обычно определяли понятие числа по Евклиду: число есть множество единиц. Определение Евклида сохраняется и во второй половине XVIII века. Еще до XVIII века применение определения Евклида встретилось с рядом трудностей. Именно, опираясь на него, нужно было признать, что 0 и 1 не являются числами: нуль есть только знак для «ничто»; единица означает только одну вещь, она – основание, «причина» числа, но не число. Известно, что такая трактовка понятия единицы была развита в древней Греции. Потом она перешла к математикам Среднего востока и Западной Европы. Решающим, однако, было то, что определение Евклида по видимости мирилось с существованием дробных чисел, но не охватывало числа иррациональные. Этот факт учитывал Лейбниц и некоторые другие математики XVII века. Лейбниц считал, что понятие числа охватывает числа целые, дробные, иррациональные и трансцендентные. Все возрастающая роль иррациональных чисел в механике, математическом анализе и алгебре способствовала тому, что во второй половине XVIII века чаще появляются и, наконец, завоевывает господствующее положение иное общее определение числа, выдвинутое Ньютоном, которое говорит нам, что число есть отношение одной величины к

Content is licensed under the Creative Commons Attribution 4.0 license (CC-BY 4.0)

другой, того же рода, принятой за единицу. Это определение охватывало как равноправные положительные целые, дробные, и иррациональные числа. На определение Ньютона опирались Эйлер, Лагранж и Лаплас [4].

Таким образом, Эвклид предварительно определил понятие числа, Ньютон существенно его уточнил. В целом числа это все: и целые, и дробные, и относительные, и рациональные, и иррациональные, и комплексные.

Арифметика – это наука, изучающая числа и действия над ними. Счет является основой арифметики. Прежде чем научиться вычислять, надо научиться считать и уметь записывать числа. Для счета люди пользуются названиями чисел и особыми знаками для краткого их обозначения.

Знаки для изображения чисел называются цифрами. Мы пользуемся десятью цифрами: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, и 9. Для обозначения отсутствия предметов употребляется число нуль, которое изображается цифрой 0. Все числа: 1, 2, 3, 4, …, 9, 10, 11, …, 16, 17, 18 и так далее без конца называют натуральным рядом чисел, а сами числа – натуральными числами. В натуральном ряду каждое число, начиная с 2, на единицу больше предыдущего. Натуральные числа являются целыми числами. К целым числам относится и число нуль, но оно не принадлежит к натуральным числам.

Не следует смешивать понятия «числа» и «цифры». Различных чисел можно написать сколько угодно, а цифр – только десять. Любое натуральное число мы записываем с помощью этих десяти цифр. Каждое из первых девяти натуральных чисел 1, 2, 3, …, 9 записывается одной цифрой, эти числа называются однозначными числами. Число нуль относится к однозначным числам. Все остальные натуральные числа записываются с помощью нескольких цифр и называются многозначными числами. По количеству входящих в них цифр многозначные числа делятся на двузначные, трехзначные, четырехзначные и т. д.

Это и есть то, что называется школьной подготовкой, определяющей понимание чисел, к которому на последующих этапах обучения уже больше не возвращаются. Из этого, к сожалению, не вытекает, что математики знают, что такое числа.

Содержимое доступно по лицензии Creative Commons Attribution 4.0 license (CC-BY 4.0)

Уже в очень отдаленные времена людям приходилось считать окружающие их предметы: членов своей семьи, домашних животных, убитых или пойманных на охоте зверей и т. д. Первобытные люди умели сначала отличать только один предмет от многих; затем они стали считать до двух и до трех, а все, что было больше трех, обозначали словом «много». С течением времени люди овладели счетом на пальцах.

Для выполнения счета пользовались также различными простыми приспособлениями, например: зарубками на палке, пучками прутиков, камешками и различными бусами. Предметами, которые сосчитывались, было немного, поэтому и счет был не сложный. Считая эти предметы, люди пришли к понятию числа предметов. Они поняли, что на вопрос, сколько охотник убил зверей, можно ответить, показав пять пальцев своей руки. С другой стороны, если у человека имеется пять стрел, то он тоже может показать пять пальцев.

Таким образом, хотя предметы совершенно различны (звери и стрелы), но их имеется поровну, т.е. стрел столько же, сколько и зверей. Значит, и группе зверей, и пучку стрел соответствует одно и то же число – пять. Прошло очень много времени, прежде чем люди освоились с большими числами [6].

Здесь возникает много дополнительных терминов: «нумерация», «счет», «один предмет», «многие», «два», «три», «больше», приспособления для счета и т. д. и т. п. При этом ни одного определения. Не имея определения чисел, т.е. еще не зная, что это такое, математики сразу же переходят к классификации «видов чисел».

Есть числа натуральные, дробные, относительные, рациональные, иррациональные, комплексные. В сочетании с правилами их использования образуется интуитивное как бы понимание (знание) чисел.

Дроби делятся на «простые» и «десятичные». Простая дробь есть два числа, сопоставляемых между собой (числитель и знаменатель). Десятичная дробь есть частный случай и другая форма записи простой дроби, знаменатель которой выражен степенью числа 10. С точки зрения логики дробь вовсе не является каким-

Content is licensed under the Creative Commons Attribution 4.0 license (CC-BY 4.0)

то «новым числом», т.к. она образована парой чисел, сопоставляемых между собой, притом в определенной последовательности (порядок сопоставления не безразличен: 2/3 не то же самое, что 3/2).

Относительное число есть тоже пара, но образованная уже числом и неравенством (т.е. не числом), сокращенно обозначаемой единой записью, выражающей координату. Это тоже почему-то считается числом особого рода. Рациональное и иррациональное числа есть выражение «абсолютно точного значения» координаты. Выражаемое тоже дробью, но уже «бесконечной», в соответствии с определением «точности измерений». Здесь тоже нет никаких «новых чисел». Комплексные числа есть пара чисел, являющихся множителями вектора, одно из которых не вызывает его угловых поворотов, другое же вызывает [6].

В заключении хочется отметить, что понятие чисел, будучи исходным или первичным, действительно является довольно простым. Однако же не настолько, чтобы считать, что числа вовсе не требуют или не имеют определений.

Список литературы

1. Выгодский М.Я. Справочник по элементарной математике. – М.: Наука, 1966. – С. 59–60.

2. Кант И. Критика чистого разума / И. Кант; перевод с нем. Н. Лосского. – М.: Эксмо, 2015. – 880 с.

3. Кириллов А.А. Что такое число? – М.: Физико-математическая литература ВО Наука,1993. – С. 4–10.

4. Молодший В.Н. Основы учения о числе в XVIII: Пособие для учителей. – М.: Государственное учебно-педагогическое издательство Министерства просвещения РСФСР, 1953. – С. 33–35.

5. Принцев Н.А. Арифметика [Текст]: Учеб. пособие для 5–6-х классов вечерней (сменной) сред. общеобразовательной школы. – 4-е изд. – М.: Просвещение, 1965. – 240 с.

6. Шевченко И.Н. Арифметика: Учебник для восьмилетней и средней школы. – 11-е изд. – М.: Просвещение, 1966. – С. 67–80.

Содержимое доступно по лицензии Creative Commons Attribution 4.0 license (CC-BY 4.0)

7. Сомсиков А.И. Исторические проблемы математики. Число и арифметическое действие [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://www.sciteclibrary.ru/texsts/rus/stat/stat1954.htm (дата обращения: 19.12.2016).

Content is licensed under the Creative Commons Attribution 4.0 license (CC-BY 4.0)