(cc) BY

Дуйсенова Айнур Гайсиевна
магистрант
Гилимова Гульдана Ержанкызы
магистрант
Спивак-Лавров Игорь Феликсович
д-р физ.-мат. наук, профессор
Актюбинский региональный государственный
университет им. К. Жубанова
г. Актобе, Республика Казахстан

РАСЧЕТ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ И МАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ, СВОДИМЫХ К ДВУМЕРНЫМ

Аннотация: *в статье рассмотрены электрические и магнитные поля, уравнения для потенциалов которых с помощью замены переменных сводятся к двумерному уравнению Лапласа. Эти решения являются гармоническими функциями декартовых координат, и для их расчета можно использовать мощный аппарат теории функций комплексной переменной (ТФКП). Развитый метод позволил выполнить расчет потенциалов конических полей, обладающих средней плоскостью.*

Ключевые слова*: статические масс-спектрометры с двойной фокусировкой, ахроматической системы, телескопическая система, коническая поле.*

Введение

Обычно для вычисления потенциалов поля корпускулярно-оптических систем (КОС) целесообразно использовать системы координат, которые соответствуют симметрии КОС: декартовы координаты – в случае двумерных полей, цилиндрические координаты – в случае трансаксиальных и осесимметричных полей, сферические – в случае так называемых конических полей и т. д.

В случае двумерных полей скалярные потенциалы φ и ω не изменяются вдоль некоторого направления. Если вдоль этого направления направить одну из осей декартовой системы координат, то потенциалы будут зависеть только от

Content is licensed under the Creative Commons Attribution 4.0 license (CC-BY 4.0)

двух других координат. Эквипотенциальные поверхности двумерных полей представляют собой цилиндрические поверхности, образующая которых параллельна выбранной оси, поэтому такие поля часто называют цилиндрическими. Потенциалы, описывающие такие поля, удовлетворяют двумерному уравнению Лапласа и являются гармоническими функциями декартовых координат и для их расчета можно использовать мощный аппарат теории функций комплексной переменной (ТФКП) [1].

В свободном от зарядов и токов пространстве скалярные потенциалы φ и ω удовлетворяют уравнению Лапласа, и для их расчета можно использовать практически одинаковые методы. Поэтому здесь, чтобы избежать повторений, мы будем говорить в основном о скалярном электростатическом потенциале φ, имея в виду, если это не оговорено особо, и магнитный скалярный потенциал ω.

В корпускулярной оптике рассматриваются также поля, потенциалы которых в цилиндрических координатах ρ, ψ, z зависят только от двух переменных ρ, ψ. Потенциалы таких полей с помощью замены:

$$\eta = \ln\rho \tag{1}$$

превращаются в гармонические функции переменных ψ, η удовлетворяющие двумерному уравнению Лапласа:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial\psi^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial\eta^2} = 0\,. \tag{2}$$

Коническими называются поля, эквипотенциальные поверхности которых являются коническими поверхностями с общей вершиной, расположенной в средней плоскости (см., например, [2]). Двумерные поля получаются из них в предельном случае, когда конические поверхности вырождаются в цилиндрические. В сферической системе координат r, ϑ, ψ с полюсом 0 в вершине конических полезадающих поверхностей скалярные потенциалы φ и ω являются функциями только угловых переменных ϑ и ψ. Корпускулярно-оптические системы,

Содержимое доступно по лицензии Creative Commons Attribution 4.0 license (CC-BY 4.0)

в которых реализуются такие поля, называются коническими отклоняющими системами. Потенциал $\varphi(\vartheta, \psi)$ в сферических координатах является решением уравнения Лапласа:

$$\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta}\right)+\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\psi^2}=0\,. \quad (3)$$

Это уравнение с помощью замены

$$\zeta=\ln\operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2} \quad (4)$$

сводится к двумерному уравнению Лапласа:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial\psi^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial\zeta^2}=0\,. \quad (5)$$

Таким образом, функция $\varphi(\psi, \zeta)$ также является гармонической функцией переменных ψ и ζ.

Разработка методов расчета конических электрического и магнитного полей

Рассмотрим расчет потенциалов поля конических отклоняющих систем в приближении, когда зазоры между их электродами и магнитными элементами считаются бесконечно узкими. В работе [3] получены простые выражения, описывающие поля клиновидных и конусовидных призменных систем с пренебрежимо малыми зазорами между электродами. Отмечая координаты клиновидных систем индексом «Λ», найдем, что связь между сферическими координатами «клина» ϑ_Λ, ψ_Λ и переменными «конуса» ψ, ζ задается преобразованием поворота

$$\tau_\Lambda=i\ln\operatorname{tg}\frac{\tau}{2}\,. \quad (6)$$

Здесь $\tau_{\Lambda 1}=\psi_\Lambda+i\zeta_\Lambda$, $\tau=\psi+i\zeta$, а ζ_Λ связано с ϑ_Λ тем же соотношением (4)

$$\zeta_\Lambda=\ln\operatorname{tg}\frac{\vartheta_\Lambda}{2}\,. \quad (7)$$

Граничные условия Дирихле для поля конусовидных призм задаются на поверхностях двух прямых круговых конусов, которые расположены симметрично относительно средней плоскости $\vartheta=\pi/2$, и имеют общую вершину и ось враще-

Content is licensed under the Creative Commons Attribution 4.0 license (CC-BY 4.0)

ния. Область, заключенная между этими коническими поверхностями, при переходе в комплексную $\tau = \psi + i\zeta$ плоскость отображается на симметричную относительно оси ψ полосу, для которой $-\zeta_k \le \zeta \le \zeta_k$. Здесь, согласно (4), ζ_k связано с углом χ между обращенными к средней плоскости образующими конусов соотношением

$$\zeta_k = \ln \operatorname{tg} \frac{\pi + \chi}{4}. \tag{8}$$

На рис. 1 показаны простейшие двухэлектродные электростатические конусовидная и клиновидная отклоняющие системы. Границы электродов в случае конусовидной призмы (рис. 1*a*) задаются поверхностями прямых круговых конусов $\vartheta = \pi/2 \pm \chi/2$, разделенных плоскостью $\psi = 0, \pi$. На рис. 1*c* приведена соответствующая граничная задача, возникающая при переходе к переменным ψ, ζ. В случае двухэлектродной клиновидной призмы (рис. 1*b*) границы электродов совпадают с полуплоскостями $\psi_\Lambda = \pm \chi_\Lambda$, разделенными плоскостью $\vartheta_\Lambda = \pi/2$. На рис. 1*d* приведена соответствующая граничная задача в переменных $\psi_\Lambda, \zeta_\Lambda$. На рис. 1*d* обозначены также безразмерные потенциалы электродов V_1, V_2 и параметр ζ_k.

Найдем распределение потенциала $F_1(\psi, \zeta | V_1, V_2)$, удовлетворяющего следующим граничным условиям:

$$F_1(\psi, \zeta_k | V_1, V_2) = \begin{cases} V_1 \text{ при } \psi < 0 \\ V_2 \text{ при } \psi > 0 \end{cases}, \tag{9}$$

Здесь для удобства дальнейших записей потенциалы электродов V_1 и V_2 введены под знак аргумента.

Воспользовавшись конформным преобразованием

$$w = i \exp\left(\frac{\pi}{2\zeta_k} \tau \right), \tag{10}$$

отобразим полосу $-\zeta_k \le \zeta \le \zeta_k$ на верхнюю полуплоскость плоскости *w*, для которой, используя интеграл Пуассона, получим следующее распределение потенциала:

Содержимое доступно по лицензии Creative Commons Attribution 4.0 license (CC-BY 4.0)

$$F_1(\psi,\zeta\,|\,V_1,V_2)=V_2+\frac{V_1-V_2}{\pi}\left(\operatorname{arctg}\frac{1+u}{v}+\operatorname{arctg}\frac{1-u}{v}\right), \tag{11}$$

где, согласно (10),

$$u\equiv u(\psi,\zeta)=-\exp\left(\frac{\pi}{2\zeta_k}\psi\right)\sin\left(\frac{\pi}{2\zeta_k}\zeta\right),$$

$$v\equiv v(\psi,\zeta)=\exp\left(\frac{\pi}{2\zeta_k}\psi\right)\cos\left(\frac{\pi}{2\zeta_k}\zeta\right). \tag{12}$$

Воспользовавшись принципом суперпозиции, с помощью выражения (11) легко записать точное решение двухэлектродной задачи с учетом периодичности граничных условий (рис. 1*c*).

Content is licensed under the Creative Commons Attribution 4.0 license (CC-BY 4.0)

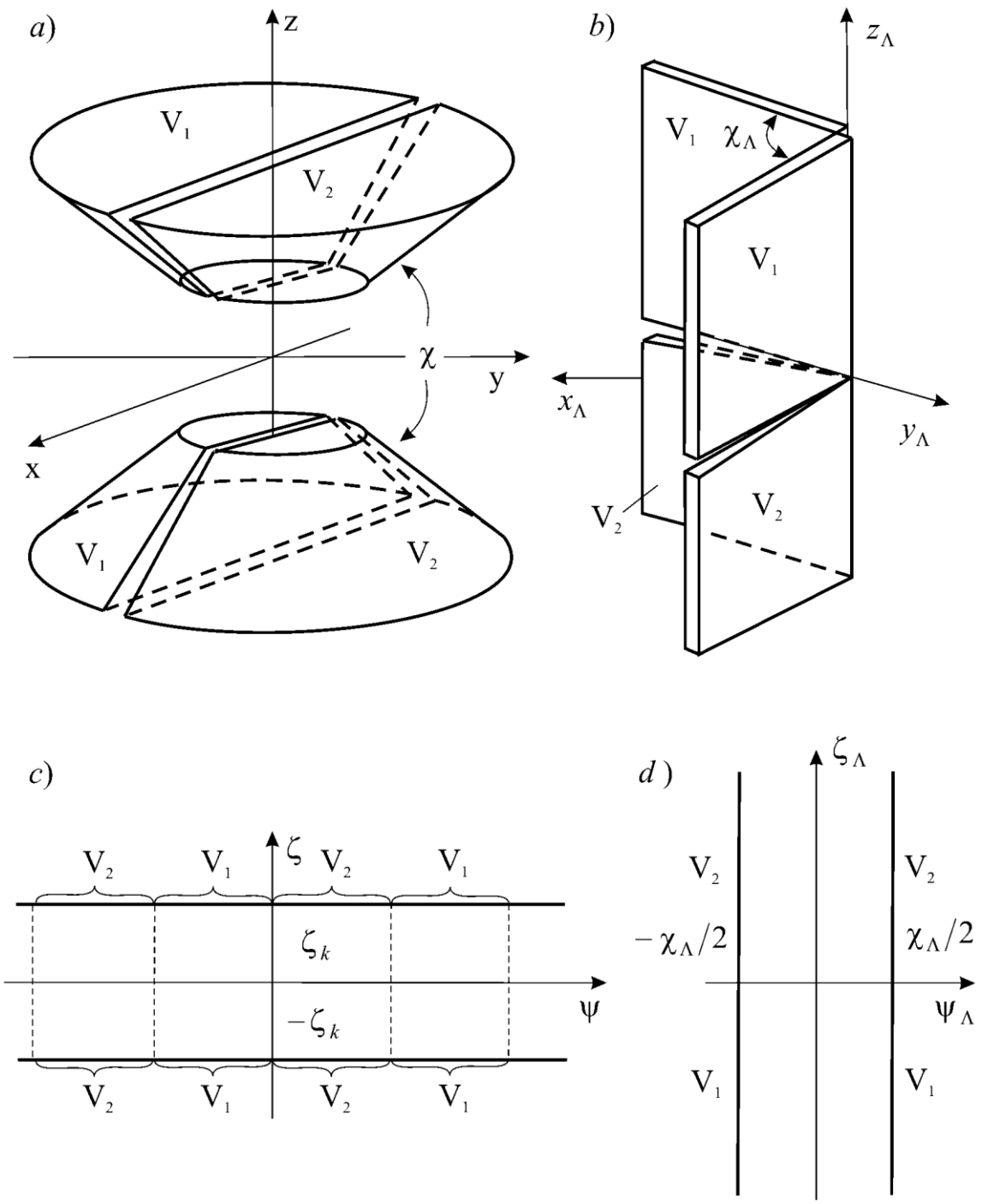

Рис. 1. Схематический рисунок двухэлектродных конусовидной и клиновидной призм; *a*) двухэлектродная конусовидная призма, *c*) соответствующая граничная задача в $\tau = \psi + i\zeta$ плоскости; *b*) двухэлектродная клиновидная призма, *d*) соответствующая граничная задача в $\tau_{\Lambda 1} = \psi_\Lambda + i\zeta_\Lambda$ плоскости

$$\Phi(\psi,\zeta) = -V_1 - V_2 + F_1(\psi,\zeta\,|\,V_1,V_2) + F_1(\psi-\pi,\zeta\,|\,V_2,V_1) + F_1(\psi+\pi,\zeta\,|\,V_1,V_2) +$$

$$+\sum_{n=0}\Big\{F_1(\psi+(2n+3)\pi,\zeta\,|\,V_2,V_1) + F_1(\psi-(2n+3)\pi,\zeta\,|\,V_2,V_1) +$$

$$+F_1(\psi+2(n+1)\pi,\zeta\,|\,V_1,V_2) + F_1(\psi-2(n+1)\pi,\zeta\,|\,V_1,V_2) - 2(V_1+V_2)\ \Big\}. \qquad (13)$$

Содержимое доступно по лицензии Creative Commons Attribution 4.0 license (CC-BY 4.0)

Однако при малых χ, когда, согласно (8), $\xi_k \cong \chi/2$, ряд в (13) приводит лишь к малым поправкам к основным членам в области $-\pi \le \psi \le \pi$. Действительно, в средней плоскости ($\zeta = 0$) члены ряда дают слагаемые, не превосходящие величины

$$2\frac{|V_1 - V_2|}{\pi}\exp\left(-\frac{\chi^2}{\pi}\right). \quad \text{.....(14)}$$

Даже при $\chi = 20^\circ$ экспонента в (14) меньше 10^{-12}, а при значениях $\chi = 5^\circ$ практически точно можно считать, что потенциал двухэлектродной конусовидной призмы определяется лишь первыми пятью слагаемыми в выражении (13). Отметим, что в области $-\pi/2 \le \psi \le \pi/2$ с очень хорошей точностью можно положить

$$\Phi(\psi, \zeta) = F_1(\psi, \zeta \,|\, V_1, V_2). \quad (15)$$

Используя принцип суперпозиции, в том же приближении легко определить и потенциал поля более сложных конусовидных призменных систем. Так, для четырехэлектродной призмы (рис. 2) с симметричным относительно плоскости *xz* расположением электродов 1, 2, 3 с потенциалами V_1, V_2, V_0 соответственно получим следующее распределение потенциала:

$$\Phi(\psi, \zeta) = -2V_2 - V_1 + F_1(\psi + \frac{\gamma_E}{2}, \zeta \,|\, V_0, V_2) + F_1(\psi + \frac{\gamma_H}{2}, \zeta \,|\, V_2, V_1) +$$

$$+ F_1(\psi - \frac{\gamma_H}{2}, \zeta \,|\, V_1, V_2) + F_1(\psi - \frac{\gamma_E}{2}, \zeta \,|\, V_2, V_0). \quad (16)$$

Здесь γ_E, γ_H – геометрические параметры, задающие положение границ электродов, определяемых полуплоскостями $\psi = \pm\gamma_E/2$, $\psi = \pm\gamma_H/2$.

По существу, полученные выражения для потенциалов поля конусовидных электростатических призм описывают и поля некоторых соответствующих им клиновидных аналогов, причем в этом случае формулы справедливы при любых значениях двугранного угла χ_Λ. Так, формула (11) дает точный потенциал двухэлектродной клиновидной призмы (рис. 1*b*, 1*d*).

Content is licensed under the Creative Commons Attribution 4.0 license (CC-BY 4.0)

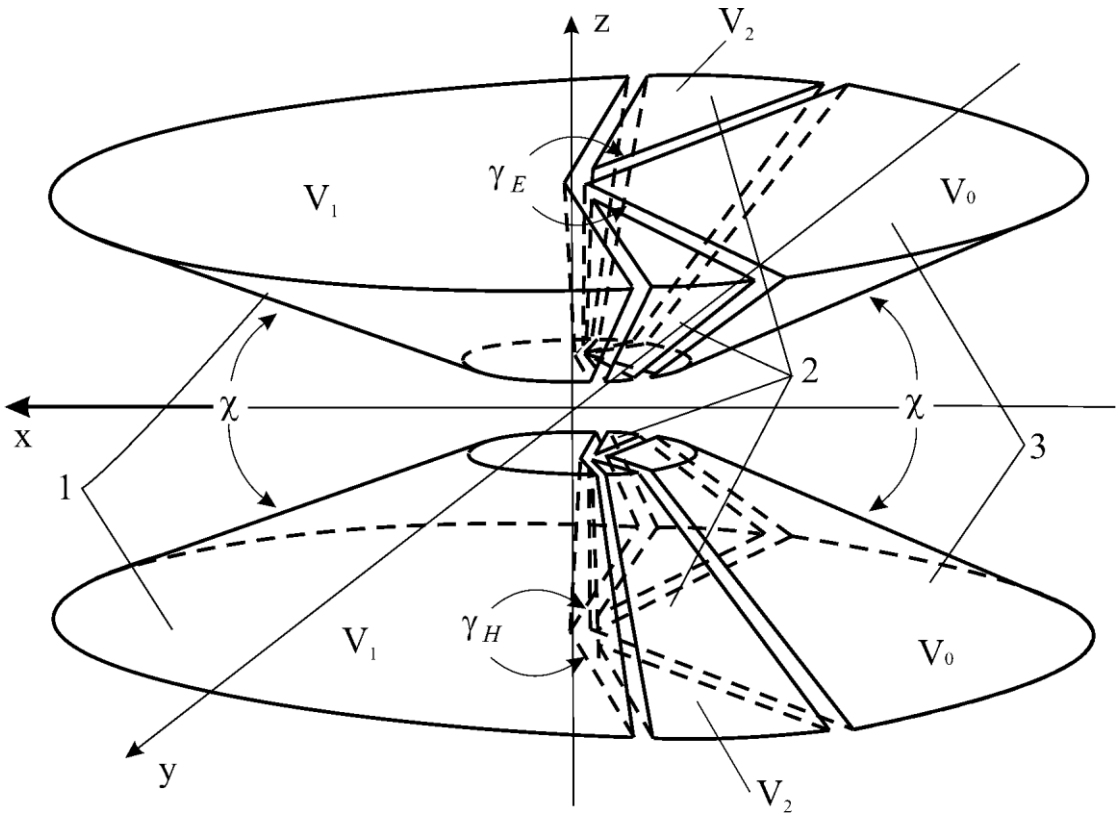

Рис. 2. Четырехэлектродная конусовидная призма

$$\Phi_\Lambda(\psi_\Lambda,\,\zeta_\Lambda) = F_1(-\zeta_\Lambda,\psi_\Lambda\,|\,V_2,V_1)\,, \tag{17}$$

Однако при это в (12) нужно положить $\zeta_k = \chi_\Lambda/2$ и учесть изменение порядка следования аргументов в (16). С помощью принципа суперпозиции можно получить потенциалы поля более сложных клиновидных призменных систем. Используя соотношения (16), можно перейти в выражениях для потенциалов к переменным «конуса» ψ,ζ :

$$\psi_\Lambda = -\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{sh}\zeta}{\cos\psi}\,,\ \zeta_\Lambda = \frac{1}{2}\ln\frac{\operatorname{ch}\zeta+\sin\psi}{\operatorname{ch}\zeta-\sin\psi}\,. \tag{18}$$

Развитый подход можно использовать и для нахождения магнитостатического потенциала конусовидных призм. В этом случае роль базовой функции $F_1(\psi,\zeta\,|\,V_1,V_2)$ будет выполнять распределение $\Omega_1(\psi,\zeta\,|\,C_1,C_2)$, удовлетворяющее в τ-плоскости граничным условиям, представленным на рис. 3*a*. Конформное преобразование (10) позволяет свести эту граничную задачу к известной граничной задаче для верхней полуплоскости *w*-плоскости (рис. 3*b*). Применяя интеграл Пуассона для верхней полуплоскости, получим

Содержимое доступно по лицензии Creative Commons Attribution 4.0 license (CC-BY 4.0)

$$\Omega_1(\psi,\zeta\,|\,C_1,C_2)=\frac{C_1-C_2}{\pi}\left[\operatorname{arctg}\frac{1+u(\psi,\zeta)}{v(\psi,\zeta)}-\operatorname{arctg}\frac{1-u(\psi,\zeta)}{v(\psi,\zeta)}\right]-\frac{2C_1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{u(\psi,\zeta)}{v(\psi,\zeta)}. \quad (19)$$

Здесь $u(\psi,\zeta)$ и $v(\psi,\zeta)$ определяются формулами (12).

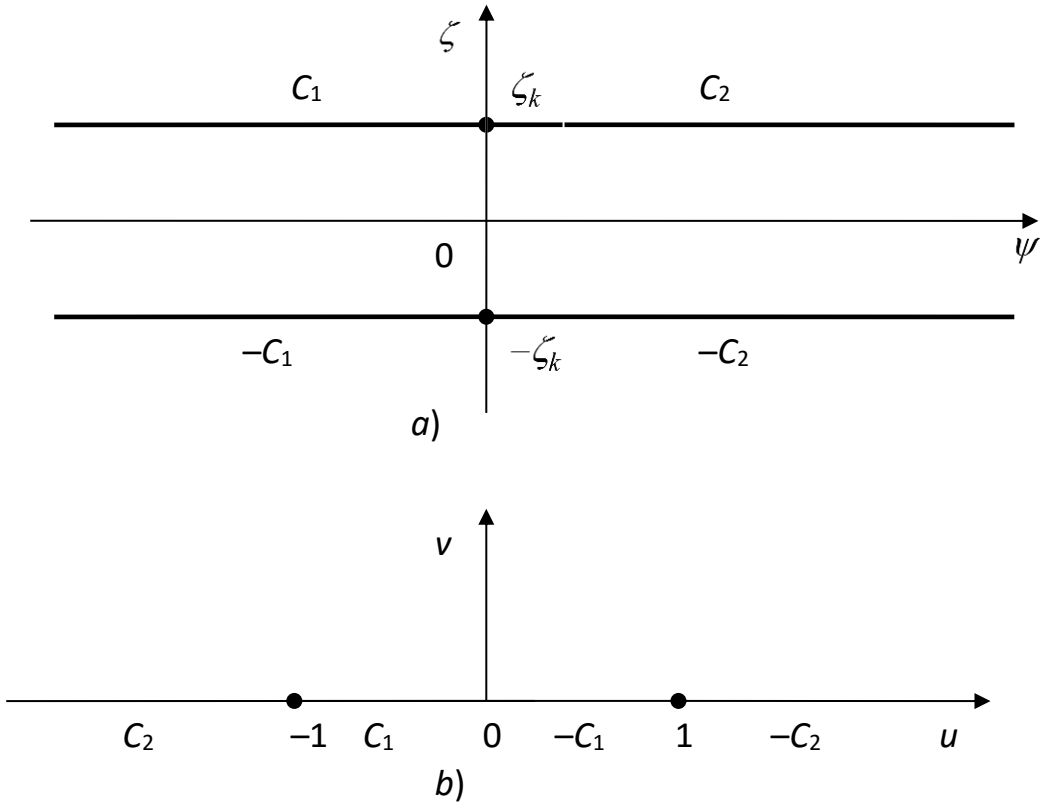

Рис. 3. Граничная задача для магнитного потенциала:

a) в τ – плоскости, *b*) в *w* – плоскости

Используя выражение (19), запишем распределение магнитостатического потенциала $\Omega(\psi,\zeta)$ в конусовидной призме (рис. 2), у которой электроды 1 одновременно являются и полюсами магнита с магнитостатическим потенциалом $\pm C_2$ на поверхностях $\vartheta=\pi/2\pm\chi/2$ соответственно, а электроды 2, 3 – магнитными экранами с бесконечно большой магнитной проницаемостью и потенциалом $C_1=0$:

$$\Omega(\psi,\zeta)=\Omega_1(\psi+\frac{\gamma_H}{2},\zeta\,\Big|-\frac{C_2}{2},\frac{C_2}{2})+\Omega_1(\psi-\frac{\gamma_H}{2},\zeta\,\Big|\frac{C_2}{2},-\frac{C_2}{2}). \quad (20)$$

Изложенный в работе метод расчета потенциалов электрических и магнитных полей конических отклоняющих систем отличается универсальностью и простотой. Получаемые с его помощью выражения для потенциалов не содержат

Content is licensed under the Creative Commons Attribution 4.0 license (CC-BY 4.0)

громоздких сумм и рядов, что особенно существенно при проведении численных расчетов. Записав выражения для потенциаллов в переменых ψ, ζ, можно найти величины:

$$f(\psi) = \Phi(\psi, 0), \; h(\psi) = \left.\frac{\partial \Omega}{\partial \zeta}\right|_{\zeta=0}, \tag{21}$$

определяющие распределение электрического и магнитного полей в средней плоскости призмы. Полученные в этом разделе аналитические выражения для потенциалов можно использовать для расчета диспергирующих, фокусирующих и аберационных свойств произвольных конических отклоняющих систем, в частности, для описания конусовидной призмы. На рис. 4 дано рассчитанное распределение потенциала и магнитного поля в призме при следующих значениях потенциалов на электродах $V_0 = 1$, $V_1 = 2$, $V_2 = 3$, $C_1 = 0$, $C_2 = 0.1$, $\chi = 5^\circ$, $\gamma_H = 208^0$, $\gamma_E = 295^\circ$.

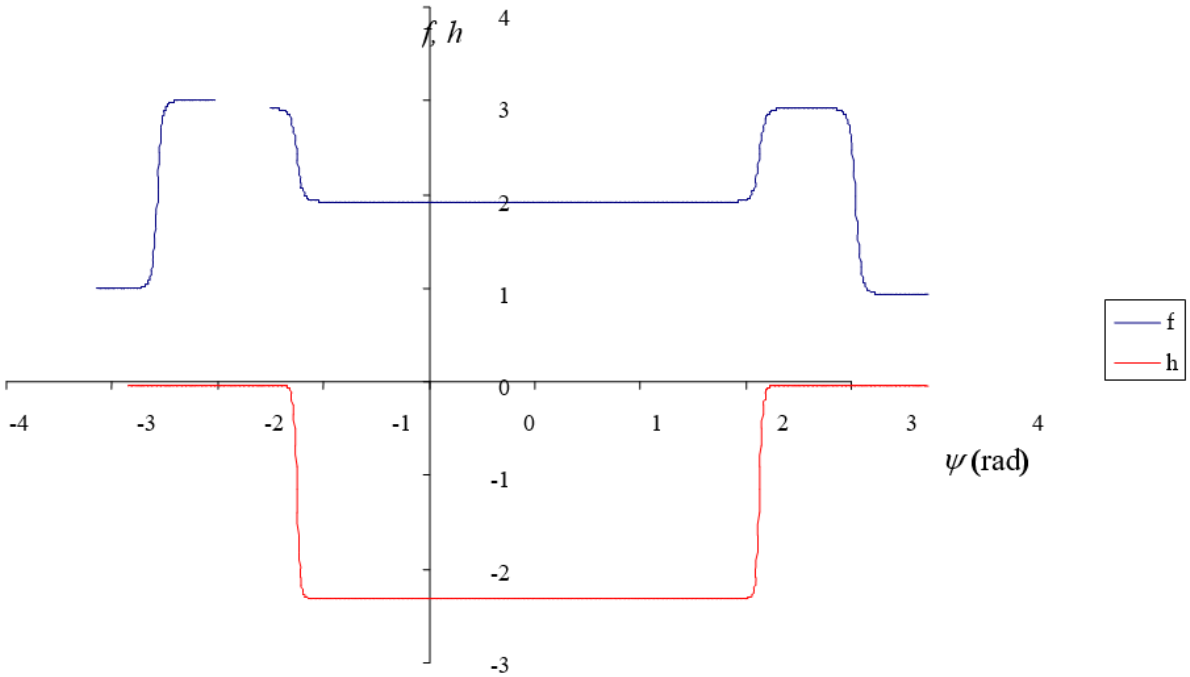

Рис. 4. Распределение электрического потенциала $f(\psi)$ и магнитного поля $h(\psi)$ в средней плоскости конусовидной призмы

Содержимое доступно по лицензии Creative Commons Attribution 4.0 license (CC-BY 4.0)

Список литературы

1. Лаврентьев М.А. Методы теории функций комплексной переменной / М.А. Лаврентьев, Б.В. Шаббат. – М.: Наука, 1972. – С. 737.

2. Гликман Л.Г. Конические отклоняющие системы с комбинированными электрическим и магнитным полями / Л.Г. Гликман // Журнал технической физики. – 1984. – Т. 54. – С. 2280–2281.

3. Доскеев Г.А. О возможности единого описания корпускулярнооптических свойств конических призменных систем / Г.А. Доскеев, И.Ф. Спивак-Лавров // Журнал технической физики. – 1989. – Т. 59. – С. 144–153.

Content is licensed under the Creative Commons Attribution 4.0 license (CC-BY 4.0)