УДК 519.8

DOI 10.21661/r-112813

Л.В. Лебедева

О РАЗРАБОТКЕ УЧЕБНЫХ ЗАДАЧ ПО ТЕМЕ «ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ»

Аннотация*: в работе предлагается способ выбора параметров математической модели закрытой транспортной задачи линейного программирования, оптимальное решение которой стандартным методом потенциалов определяется за малое количество шагов.*

Ключевые слова*: закрытая транспортная задача, линейное программирование, метод потенциалов, метод северо-западного угла.*

L.V. Lebedeva

ABOUT EDUCATIONAL TASKS DEVELOPMENT OF THE SUBJECT «TRANSPORTATION PROBLEM OF LINEAR PROGRAMMING»

Abstract*: the research offers a variant of closed transportation task of linear programming options choice, which optimal solution is defined by a standard method of potentials involving small quantity of steps.*

Keywords*: closed transportation task, linear programming, potenial method, northwestern angle method.*

Теория линейного программирования (ЛП), появившаяся в первой половине XX века, в настоящее время получила широкое применение в самых различных задачах оптимизации, логистики [1]. При решении реальных производственных задач методами ЛП требуется использование вычислительной техники и знание соответствующего программного обеспечения. Однако при первом знакомстве с этой теорией полезны простые задания, с одной стороны, позволяющие получить оптимальное решение за небольшое количество шагов, с другой стороны, демонстрирующие все основные моменты выбранного метода. На основе таких заданий достаточно просто могут быть построены и тестовые проверочные работы, в которых студентам предлагается выбрать правильный ответ из нескольких имеющихся. Не смотря на большое количество существующей сегодня учебной литературы по данной тематике, соответствующая методическая литература представлена в недостаточном объеме. Составление заданий по теме «Транспортная задача линейного программирования» представляется не самым простым вопросом, поскольку математическая модель транспортной задачи содержит большое количество параметров. Это и объемы грузов, имеющихся у поставщиков, и объемы грузов, заказанные потребителями, и стоимости перевозок по каждому из направлений.

В настоящей работе сформулированы ограничения на параметры математической модели, выполнение которых обеспечивает определение оптимального решения методом потенциалов (без вырождений) за три шага, при условии, что первоначальный опорный план построен методом северо-западного угла.

Постановка задачи [1, с. 288]. Некоторый однородный груз, сосредоточенный у *поставщиков* $A_1, \dots, A_m$ в количестве $a_1, \dots, a_m$ единиц соответственно, требуется доставить *потребителям* $B_1, \dots, B_n$ в количестве $b_1, \dots, b_n$ единиц соответственно. Предполагается, что $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$. Задана матрица транспортных издержек $C_{m\times n} = \|c_{ij}\|$, где c_{ij} – стоимость перевозки одной единицы груза от поставщика A_i потребителю B_j. Требуется найти оптимальный план $X = \|x_{ij}\|$, т.е. объемы перевозок x_{ij} $(x_{ij} \geq 0)$ для каждой пары «поставщик A_i – потребитель B_j» такие, чтобы все грузы от поставщиков были вывезены $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \quad (i = \overline{1,m})$, все заказанные потребителями объемы грузов доставлены $\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \quad (j = \overline{1,n})$, и суммарная стоимость перевозок была бы минимальной $Z(X) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} \cdot x_{ij} \Rightarrow \min$.

Запишем ограничения, которым должны удовлетворять параметры математической модели в простейшем случае, когда имеется два поставщика и три потребителя. Мы хотим, чтобы третий опорный план был оптимальным. Предположим, что элементы платежной матрицы $C_{2\times3}$ удовлетворяют соотношениям $c_{21} = c_{11} + r$, $c_{22} = c_{12} + s$, $c_{23} = c_{13} + t$.

1 вариант. Ограничения на параметры r, s, t: $r < s < t$, $t - s < s - r$.

Порядок и условия выбора значений для параметров a_1, a_2, b_1, b_2, b_3: b_1; a_1 $(a_1 > b_1)$; b_2 $(b_2 > a_1 + b_1)$; b_3 $(b_3 > a_1)$; a_2 $(a_2 = b_1 + b_2 + b_3 - a_1)$.

2 вариант. Ограничения на параметры r, s, t: $r < s < t$, $t - s < s - r$.

Порядок и условия выбора значений для параметров a_1, a_2, b_1, b_2, b_3: b_1; a_1 $(a_1 > b_1)$; b_2 $(b_2 > a_1)$; b_3 $(b_3 > a_1)$; a_2 $(a_2 = b_1 + b_2 + b_3 - a_1)$.

3 вариант. Ограничения на параметры r, s, t: $r < s$, $r < t$, $0 < t - s < s - r$.

Порядок и условия выбора значений для параметров a_1, a_2, b_1, b_2, b_3: b_1; b_2 ; b_3 $(b_3 < b_1)$; a_1 $(b_2 + b_3 < a_1 < b_1 + b_2)$; a_2 $(a_2 = b_1 + b_2 + b_3 - a_1)$.

4 вариант. Ограничения на параметры r, s, t: $r \le t \le s$, $r + t < 2 \cdot s$.

Порядок и условия выбора значений для параметров a_1, a_2, b_1, b_2, b_3: b_1; b_2 ; a_1 $(b_2 < a_1 < b_1 + b_2)$; b_3 $(b_3 > a_1 - b_2)$; a_2 $(a_2 = b_1 + b_2 + b_3 - a_1)$.

5 вариант. Ограничения на параметры r, s, t: $2s - t < r \le s \le t$.

Порядок и условия выбора значений для параметров a_1, a_2, b_1, b_2, b_3: b_1; b_2 ; b_3 $(b_3 < b_2)$; a_2 $(a_2 > b_1)$; a_1 $(a_1 = b_1 + b_2 + b_3 - a_2)$

6 *вариант.* Ограничения на параметры r, s, t: $2s - t < r < s < t$.

Порядок и условия выбора значений для параметров a_1, a_2, b_1, b_2, b_3: b_1; b_2 ; b_3 ($b_3 < \min\{b_1, b_2\}$); a_1 ($\max\{b_1 + b_3, b_2 + b_3\} < a_1 < b_1 + b_2$) ;

a_2 ($a_2 = b_1 + b_2 + b_3 - a_1$).

7 вариант. Ограничения на параметры r, s, t: $s<r<t$.

Порядок и условия выбора значений для параметров a_1, a_2, b_1, b_2, b_3: b_1; b_2 ; b_3; a_1 ($\max\{b_1, b_3\} < a_1 < \min\{b_1 + b_2, b_1 + b_3\}$); a_2 ($a_2 = b_1 + b_2 + b_3 - a_1$).

8 вариант. Ограничения на параметры r, s, t: $t>\max\{ s; r; 2s - r; 0.5(s + r)\}$.

Порядок и условия выбора значений для параметров a_1, a_2, b_1, b_2, b_3: b_1; b_2 ; b_3 ($b_1<b_3$); a_1 ($b_1 < a_1 < \min\{b_1 + b_2, b_1 + b_3, b_3\}$); a_2 ($a_2 = b_1 + b_2 + b_3 - a_1$).

9 вариант. Ограничения на параметры r, s, t: $s<r<t$.

Порядок и условия выбора значений для параметров a_1, a_2, b_1, b_2, b_3: b_1; b_2 ; b_3 ($b_1 + b_2 < b_3$); a_1 ($b_1 + b_2 < a_1 < b_3$); a_2 ($a_2 = b_1 + b_2 + b_3 - a_1$).

10 вариант. Ограничения на параметры r, s, t: $s<r<t$.

Порядок и условия выбора значений для параметров a_1, a_2, b_1, b_2, b_3: b_1; b_2 ($b_1 < b_2$); b_3 ($b_2 < b_3$); a_1 ($b_1 + b_2 < a_1 < b_1 + b_3$); a_2 ($a_2 = b_1 + b_2 + b_3 - a_1$).

Пример. Построим математической модели, используя требования варианта 1. Пусть $c_{11} = 10$, $c_{12} = 7$, $c_{13} = 11$. Примем $r = -1$, $s = 3$ ($s > r$), $t = 5$ ($t < 2s - r = 7$). Тогда $c_{21} = 9$, $c_{22} = 10$, $c_{23} = 16$. Выберем объемы перевозок: $b_1 = 120$; $a_1 = 150$ ($a_1 > b_1$); $b_2 = 300$ ($b_2 > a_1 + b_1 = 270$); $b_3 = 180$ ($b_3 > a_1$); $a_2 = 450$ ($a_2 = b_1 + b_2 + b_3 - a_1$). Получим задачу, данные которой можно записать в таблицу 1.

Таблица 1

	B_1	B_2	B_3	a_i :
A_1	10	7	11	150
A_2	9	10	16	450
b_j :	120	300	180	

Легко проверяется, что первый $\begin{Vmatrix} 120 & 30 & - \\ - & 270 & 180 \end{Vmatrix}$ и второй $\begin{Vmatrix} - & 150 & - \\ 120 & 1500 & 180 \end{Vmatrix}$ опорные планы не удовлетворяют условиям оптимальности. Оптимальным является третий опорный план $\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 150 \\ 120 & 3000 & 30 \end{Vmatrix}$.

Используя аналогичные соотношения можно построить математические модели для случая, например, платежной матрицы $C_{3\times 5}$. Двадцать четыре варианта таких заданий приведены в таблице 2.

Таблица 2

№1	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i :
A_1	20	3	9	18	35	300
A_2	24	18	12	20	50	150
A_3	34	17	22	19	48	250
b_j :	160	120	100	140	180	700

№2	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i :
A_1	*7*	*3*	*9*	*18*	*35*	*180*
A_2	*11*	*18*	*12*	*20*	*50*	*100*
A_3	*21*	*17*	*22*	*19*	*48*	*120*
b_j :	*100*	*60*	*90*	*70*	*80*	*400*

№3	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i :
A_1	*7*	*20*	*10*	*19*	*35*	*250*
A_2	*22*	*24*	*12*	*20*	*50*	*125*
A_3	*21*	*35*	*22*	*19*	*48*	*225*
b_j :	*120*	*110*	*85*	*135*	*150*	*600*

№4	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i :
A_1	*48*	*19*	*16*	*34*	*21*	*200*
A_2	*50*	*20*	*10*	*28*	*22*	*110*
A_3	*35*	*15*	*3*	*20*	*7*	*190*
b_j :	*120*	*130*	*70*	*100*	*80*	*500*

№5	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i :
A_1	*7*	*20*	*3*	*19*	*38*	*220*

A_2	15	14	10	12	46	120
A_3	19	36	15	16	48	160
b_j :	70	110	80	100	140	500

№6	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i :
A_1	24	23	18	22	15	600
A_2	26	24	17	23	16	115
A_3	25	32	31	29	17	100
b_j :	120	110	90	180	315	815

№7	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i :
A_1	7	20	3	9	15	210
A_2	15	28	10	12	20	140
A_3	17	25	13	16	19	150
b_j :	80	120	90	110	100	500

№8	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i :
A_1	11	7	3	9	11	170
A_2	19	15	10	12	20	120
A_3	18	19	15	16	19	110
b_j :	90	70	90	80	70	400

№9	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i :
A_1	18	15	27	25	19	150
A_2	15	3	14	12	20	300
A_3	11	7	20	9	15	250
b_j :	140	160	100	120	180	700

№10	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i :
A_1	17	15	19	14	10	200
A_2	16	17	21	10	10	50
A_3	18	13	22	16	11	70
b_j :	50	40	20	60	150	320

№11	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i :
A_1	23	21	13	10	49	150
A_2	20	17	9	3	36	300
A_3	36	19	25	18	48	250
b_j :	160	140	100	120	180	700

№12	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i :
A_1	10	10	15	23	49	110
A_2	16	15	19	19	48	110
A_3	6	14	9	17	35	180
b_j :	60	100	90	70	80	400

№13	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i :
A_1	20	27	24	10	49	125
A_2	18	25	22	15	48	225
A_3	18	24	15	7	35	250
b_j :	135	110	85	120	150	600

№14	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i :
A_1	11	17	20	18	13	650
A_2	20	13	17	15	9	200
A_3	10	19	14	20	15	150
b_j :	200	100	120	130	450	1000

№15	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i :
A_1	10	12	20	48	3	100
A_2	22	16	19	48	21	130
A_3	15	9	20	35	7	170
b_j :	60	90	70	80	100	600

№16	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i :
A_1	7	15	9	16	10	800
A_2	15	16	10	18	8	120
A_3	11	14	12	13	10	180
b_j :	200	200	100	160	440	1100

№17	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i :
A_1	19	18	15	19	18	100
A_2	16	12	10	15	19	120
A_3	15	9	3	7	11	170
b_j :	70	70	90	70	90	390

№18	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i :
A_1	13	10	20	46	3	110
A_2	27	11	19	48	15	180

A_3	25	3	15	35	7	210
b_j :	100	70	130	120	80	500

№19	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i :
A_1	14	10	16	46	3	120
A_2	27	11	16	48	15	160
A_3	20	3	9	35	7	220
b_j :	110	80	100	140	70	500

№20	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i :
A_1	14	10	16	22	3	140
A_2	27	11	16	24	18	150
A_3	20	3	9	15	7	210
b_j :	120	90	110	100	80	500

№21	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i :
A_1	39	43	46	45	40	500
A_2	40	42	47	46	41	90
A_3	41	44	48	45	41	120
b_j :	90	100	110	80	330	710

№22	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i :
A_1	12	10	14	20	46	150
A_2	24	11	25	19	48	250
A_3	10	8	22	15	35	300
b_j :	100	120	160	140	180	700

№23	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i :
A_1	10	20	14	5	16	250
A_2	22	32	25	15	20	125
A_3	26	15	30	19	10	225
b_j :	135	85	110	150	120	600

№24	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i :
A_1	11	20	14	19	20	150
A_2	21	25	11	16	25	150
A_3	17	14	10	12	20	200
b_j :	80	110	60	140	110	500

Список литературы

1. Красс М.С. Математика в экономике: математические методы и модели: учебник для бакалавров / М.С. Красс, Б.П. Чупрынов; под ред. М.С. Красса. – 2-е изд., испр. и доп. – М.: Юрайт, 2013. – 541 с.

Лебедева Лариса Владимировна – канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры математики ФБОУ ВО «Волжский государственный университет водного транспорта», Россия, Нижний Новгород.

Lebedeva Larisa Vladimirovna – candidate of physical and mathematical sciences, associate professor of Mathematics Department of FSBEI of HE “Volga State University of Water Transport”, Russia, Nizhny Novgorod.
