Селезнев Евгений Игоревич

студент

Жмыхов Максим Эдуардович

студент

Бабаскина Анастасия Александровна

студентка

ФГБОУ ВО «Юго-Западный государственный университет»

г. Курск, Курская область

АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ИДЕИ ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА: ИСТОКИ И НАСЛЕДИЕ

Аннотация: *в данной статье рассматривается математическое наследие знаменитого ученого Леонарда Эйлера. В частности, авторы обращаются к анализу некоторых арифметических работ ученого: обсуждаются истоки и последствия научных изысканий Леонарда Эйлера в области арифметики.*

Ключевые слова: *арифметика, теория чисел, простые числа, целые числа, Малая теорема Ферма, Великая теорема Ферма.*

Научное наследие замечательного математика, разностороннего ученого Леонарда Эйлера поистине огромно. О нем написано достаточно большое количество работ и обзоров. При жизни ученый являлся членом двух Академий наук: Петербургской и Берлинской, он был почетным академиком во многих странах. Им созданы труды по математике, механике, физике, астрономии, прикладным наукам, учебники и некоторые другие. Целых 24 статьи в «Математической энциклопедии» посвящают свое содержание его научным достижениям [1].

Жизненный путь Леонарда Эйлера сложный и интересный. Нашей задачей не является обсуждение его биографии. Если сказать кратко, то родившись в Швейцарии в 1707 году в городе Базеле, знаменитый ученый, волею судьбы в 1727 уехал в Россию, которую был вынужден покинуть в 1740. Вернувшись в Берлин, ученый остается там до 1766. Однако в этом же году возвращается в Россию, где остается до конца жизни, вплоть до 1783 года. Все эти годы ученый работал над многими своими идеями. Описаны понятия «точки Эйлера», «прямая Эйлера», «Эйлера метод суммирования числовых и функциональных рядов», «Эйлера многочлены», «Эйлера преобразование рядов» и многое другое. По мнению И.С. Емельянова, если вам хочется проверить эрудицию студента, то ему стоит задать простой вопрос: «Напишите формулу Эйлера» – и полученная реакция, по мнению автора, многое объяснит [2].

Цель настоящей статьи состоит в том, чтобы проанализировать некоторые арифметические работы ученого: что повлияло на их возникновение и что стало итогом.

Одним из великих предшественников в арифметике для Эйлера явился Пьер Ферма (1601–1665). Пьер Ферма был первым, кто увидел, что в арифметике имеются не только интересные факты про конкретные числа, но и общие утверждения – теоремы. Эйлер узнал о работах Ферма от Гольдбаха и занимался теорией чисел всю жизнь.

Итак, в 1729 году Эйлер узнал от Гольдбаха об утверждении Ферма, что числа $F_n=2^{2n}+1$являются простыми при всех n. В 1732 году он выяснил, что это утверждение является неверным, а именно F_5 делится на 641. Вначале он обнаружил, что делители F_n имеют очень специальный вид (если они существуют): к $\cdot$ $2^{n+2+}+1$, а после этого обнаружить $641 = 5\cdot2^7+1$ было нетрудно [3].

Другой класс простых чисел в поле зрения Эйлера – это простые числа Мерсенна $M_p=2^p-1$ (p – простое). Делители M_p должны одновременно иметь вид $2pк$-1 и $8l\pm1$. Пользуясь этим, Эйлер доказал простоту числа$M_{31} = 2147483647$. С тех пор новых простых чисел Ферма обнаружено не было, а рекорды в мире простых чисел Мерсенна постоянно увеличиваются (рекорд 1983 г.: $p = 86243$; сегодня компьютеры поставляют простые числа Мерсенна с невероятным числом знаков).

Эйлер обеспечил доказательством «малую теорему Ферма», которая утверждает, что число $a^{p-1}-1$, где a – целое, не делящееся на p, аp – простое, делится на р; но, не ограничившись этим, он находит и доказывает ее обобщение на непростой делитель: если *a* и *m* взаимно просты, то $a^{\varphi(m)}-1$ делится на *m* (здесь $\varphi(m)$ – число натуральных чисел, взаимно простых с *m* и меньших *m*; при простом *p* имеем $\varphi(p) = p - 1$). Обнаружив, что функция натурального аргумента $\varphi(m)$ (её назовут функцией Эйлера) обладает замечательными свойствами, ученый тем самым открывает важную главу теории чисел – теорию арифметических функций. Эксперимент с малой теоремой Ферма убеждает Эйлера, что первообразные корни существуют для всех простых *p*, но доказать этого он не смог (доказательство нашли позднее Лежандр и Гаусс).

Еще одно утверждение, сформулированное Ферма без доказательства, привлекло внимание Эйлера. Речь идет о представимости квадратов n^2 в виде $kp - 1$, где *p* – простое число. При $p = 3$ таких квадратов не бывает, а при $p = 5$ имеем $2^2 = 5 - 1$. Ферма утверждал, что для всякого простого *p* вида $4l + 1$ существует квадрат вида $kp - 1$, а для $p = 4l - 1$таких квадратов не существует. В 1747 г. Эйлер после нескольких безуспешных попыток доказывает это утверждение Ферма и продолжает движение в естественном направлении: для каких *p* число $kp + 2$ может быть квадратом и, шире, для каких *p* при фиксированном *a* число $kp+a$ может быть квадратом? При $a = 2$ гипотеза состоит в том, что квадраты такого вида существуют при $p = 8l \pm 1$ и не существуют в остальных случаях. Общая гипотеза: квадраты вида $kp + a$ (*p* – простое) существуют (как говорят, а является квадратичным вычетом по модулю *p*) или несуществуют (*a* – квадратичный невычет) одновременно для всехпростых *p* из арифметической прогрессии $b+4ak$ ($k = 1, 2, 3,...$). Это утверждение позднее получило название квадратичного законом взаимности.

Следующий круг вопросов, унаследованный у Ферма, это решение уравнений в целых числах. Наиболее знаменитое утверждение Ферма-его «Великая теорема»: уравнение $x^n + y^n = z^n$ при натуральном $n > 2$ не имеет решений в целых положительных числах (при $n = 2$ такие решения существуют и называются пифагоровыми тройками). В 1738 году Эйлер находит доказательство «Великой теоремы Ферма» для $n = 3, 4$, но он отказался от попыток доказать теорему для больших *n*, несмотря на немотивированное утверждение Ферма о существовании доказательства для произвольного *n*. Великая теорема Ферма была доказана Э.Уайлсомв 1995 году.

Однажды Ферма предложил Френиклю и Сен-Мартену построить прямоугольный треугольник с целочисленными сторонами, у которого сумма катетов и гипотенуза-квадраты, то есть решить в целых числах систему уравнений $x+y = u^2$, $x^2+y^2 = u^4$. Ферма заподозрили в том, что он дал «невозможную» задачу. Эйлер исследовал эту систему, замечательную тем, что ее наименьшее решение дается 13-значнымичислами: 1 061 652 293 520,4 565 486 027 761.Эйлер рассматривает уравнение $x^2 – Dy^2 = 1$, $D \neq a^2$, которое он называет уравнением Пелля.

Он обнаруживает связь его наименьшего решения с разложением $\sqrt{D}$ в бесконечную цепную дробь. Многочисленные примеры убеждают Эйлера, что получается периодическая цепная дробь, но доказательство этого факта лишь позднее нашел Лагранж [3].

С учетом анализа той стороны арифметической деятельности Эйлера, в которой он был последователем Ферма, можно сказать, что он (Эйлер) включил утверждения Ферма в хорошо просчитанную картину мультипликативной (связанной с делимостью) теории чисел и безошибочно увидел все ей основные теоремы и проблемы. Доказательством некоторых ключевых утверждений занимались уже последователи Эйлера.

Уже по некоторым примерам можно увидеть особенности научного стиля Эйлера. Перед ним было несколько важных задач, на которых можно было сосредоточиться на годы, если не на всю жизнь, но никакая конкретная проблема не имела для Эйлера приоритета перед воссозданием целостной картины, перед неудержимым желанием двигаться вперед. Он постоянно возвращался к неудавшимся задачам, умело распределяя время, уделяемое той или иной проблеме. Трудность возникавших проблем, сознание, что он вынужден отказаться от получения строгого доказательства, привели Эйлера к формированию способов установления математической истины, отличных от доказательства.

Эксперимент выходил на первый план не только при обдумывании задачи или гипотезы: тщательно проведенный числовой эксперимент на большом материале во внутренней системе ценностей Эйлера иногда равнозначен установлению истины. Он говорил о «познанных, но недоказанных истинах» и стремился к тому, чтобы такого рода аргументация получила гражданство в математике. Получение строгого доказательства для Эйлера оставалось важнейшей целью, но на некоторой стадии он сознательно отказывался от дальнейшего поиска, тщательно прорабатывая эвристические соображения.

Список литературы

1. Математическая энциклопедия. – М.: Сов. энциклопедия, 1985. – С. 925–938.

2. Емельянова И.С. Читайте, читайте Эйлера // Математика в высшем образовании. – 2007. – №5. – С. 113–119.

3. Гиндикин С.Г. Рассказы о физиках и математиках. – 3-е изд., расширенное. – М.: МЦНМО, 2001. – 448 с.