Автор:

Белунина Екатерина Петровна

студентка

Научный руководитель:

Бахшинян Рубен Мушегович

канд. физ.-мат. наук, доцент

ФГБОУ ВО «Поволжский государственный

университет сервиса»

г. Тольятти, Самарская область

К РЕШЕНИЮ УРАВНЕНИЙ ВЫСШИХ СТЕПЕНЕЙ

Аннотация: *в статье рассматриваются методы решения некоторых типов алгебраических уравнений произвольных степеней. На конкретных примерах показана эффективность применения различных методов при решении алгебраических уравнений третьей и четвёртой степеней.*

Ключевые слова: *методы решений, совокупность уравнений, способы разложения.*

Математические знания, получаемые студентами СПО, являются важнейшим компонентом общего образования и общей культуры современного человека. Среди этих знаний не последнее место принадлежит умению решать уравнения. Уже в древности люди осознали, как важно научиться решать алгебраические уравнения. С помощью уравнений решались разнообразные задачи землемерия, архитектуры и военного дела, к ним сводились многие и разнообразные вопросы практики и естествознания, так как точный язык математики позволяет просто выразить факты и соотношения, которые, будучи изложенными обычным языком, могут показаться запутанными и сложными.

Развитие методов решения уравнений, начиная с зарождения математики как науки, долгое время было основным предметом изучения алгебры. И сегодня на уроках математики решению уравнений различных видов уделяется большое внимание.

Универсальной формулы для нахождения корней алгебраического уравнения n-ой степени $P_n(x)=0$, нет. Многие столетия учёные предпринимали попытки найти для многочлена $P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+....+a_n$ любой степени n формулы, которые выражали бы корни уравнения $P_n(x)=0$ через его коэффициенты, то есть, решали бы уравнение в радикалах. Только в XVI веке итальянским математикам Д. Кардано и Л. Феррари удалось найти формулы для $n=3$ и $n=4$ [2]. А в начале XIX века норвежский математик Н. Абель доказал [2; 4], что корни уравнений 5-й и более высоких степеней не могут быть выражены через радикалы.

Рассмотрим некоторые методы решения уравнений высших степеней.

1. Метод разложения на множители левой части уравнения. Сущность этого метода заключается в следующем. Пусть нужно решить уравнение $P_n(x)=0$, где $P_n(x)$ – многочлен степени выше второй. Предположим, что многочлен удалось разложить на множители $P_n(x)=P_1(x)\bullet P_2(x).....\bullet P_k(x)$, где $P_1(x),P_2(x),.....,P_k(x)$ – многочлены более низкой степени. Тогда данное уравнение будет равносильно совокупности уравнений [1]:

$$\left[\begin{array}{l} P_1(x)=0 \\ P_2(x)=0 \\ \dots\dots\dots\dots \\ P_k(x)=0 \end{array}\right. . \qquad (1)$$

В зависимости от вида уравнения разложение на множители осуществляется различными способами: вынесением общего множителя, применением формул сокращённого умножения, выделением полного квадрата, методом неопределённых коэффициентов, группировкой.

Пример 1. Решить уравнение $(2x-3)^3-(2x-3)^2=12x-18$. Вынеся в правой части уравнения общий множитель и перенеся в левую часть, получим

$$(2x-3)^3-(2x-3)^2-6(2x-3)=0. \qquad (2)$$

После некоторых преобразований, уравнение (2) примет вид:

$$(2x-3)\left(2x^2-7x+3\right)=0. \tag{3}$$

Уравнение (3) равносильно совокупности уравнений:

$$\left[\begin{array}{l}2x-3=0,\\ 2x^2-7x+3=0.\end{array}\right.$$

Отсюда получим: $x_1=0{,}5;\ x_2=1{,}5;\ x_3=3.$

Пример 2. Решить уравнение $x^4-4x^3+4x^2=(7x+1)^2$. Вынеся в левой части общий множитель и произведя некоторые преобразования, уравнение запишется в виде:

$$x^2(x-2)^2-(7x+1)^2=0. \tag{4}$$

С использованием формул сокращённого умножения, уравнение (4) примет вид:

$$\left(x^2-9x-1\right)\left(x^2+5x+1\right)=0. \tag{5}$$

Аналогично приведённому выше примеру, получим

$$\left[\begin{array}{l}x^2-9x-1=0,\\ x^2+5x+1=0.\end{array}\right.$$

Окончательно имеем: $x_{1,2}=\dfrac{9\pm\sqrt{85}}{2};\ x_{3,4}=\dfrac{-5\pm\sqrt{21}}{2}.$

Пример 3. Решите уравнение $x^3+9x^2+23x+15=0$.

Для решения воспользуемся методом неопределённых коэффициентов, суть которого состоит в том, что исходный многочлен раскладывается на множители с неизвестными коэффициентами. Из условия, что многочлены равны, если равны их коэффициенты при одинаковых степенях переменных, находятся неизвестные коэффициенты разложения [1; 3].

Решение. Многочлен третьей степени представим разложенным в виде произведения линейного и квадратного множителей

$$x^3+9x^2+23x+15=(x-a)\left(x^2+bx+c\right). \tag{6}$$

Раскрыв скобки в правой части равенства и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях переменных, для определения коэффициентов разложения a, b и c получим систему уравнений:

$$\begin{cases} b - a = 9, \\ c - ab = 23, \\ -ac = 15. \end{cases} \tag{7}$$

Решив систему (7), находим $a = -1,\ b = 8,\ c = 15.$ С учётом этих значений, исходное уравнение будет иметь вид

$$(x+1)\left(x^2 + 8x + 15\right) = 0\,. \tag{8}$$

Приравняв нулю каждый из сомножителей уравнения (8), получим:

$$x_1 = -5;\ \ x_2 = -3;\ \ x_3 = -1.$$

2. Метод введения новой переменной. Сущность метода введения новой переменной заключается в том, что для решения уравнения $P_n(x) = 0$ вводят новую переменную (подстановку) $t = x^n$ или $t = f(x)$ и выражают $P_n(x)$ через t, получая новое уравнение. Решив новое уравнение, находят корни $(t_1, t_2, \ldots, t_k)$. После этого получают совокупность k уравнений $f(x) = t_1, f(x) = t_2, \ldots, f(x) = t_k$, решив которые находят корни исходного уравнения [3].

Пример 4. Решить уравнение $9x^2 + \dfrac{4}{x^2} + 3x - \dfrac{2}{x} - 14 = 0.$ Приведём уравнение к виду, удобному для введения новой переменной:

$$\underbrace{(3x)^2 + \left(\frac{2}{x}\right)^2 - 12} + 12 + \underbrace{3x - \frac{2}{x}} - 14 = 0 \;\Rightarrow\; \left(3x - \frac{2}{x}\right)^2 + \left(3x - \frac{2}{x}\right) - 2 = 0. \tag{9}$$

Введя обозначение $3x - \dfrac{2}{x} = t$, уравнение (9) примет вид:

$$t^2 + t - 2 = 0 \;\Rightarrow\; t_1 = -2,\ \ t_2 = 1.$$

С учётом введённого обозначения, получим следующую совокупность уравнений:

$$\left[\begin{array}{l} 3x - \dfrac{2}{x} = -2, \\ 3x - \dfrac{2}{x} = 1. \end{array}\right.$$

Решив эти уравнения, окончательно получим: $x_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{7}}{3}$; $x_3 = -\dfrac{2}{3}$; $x_4 = 1$.

Из рассмотренных примеров видно, что применение приведённых методов сводит решение некоторых видов алгебраических уравнений третьей и четвёртой степеней к решению уравнений более низких степеней.

Список литературы

1. Белкин Л.П. Решение алгебраических уравнений 2-й, 3-й, 4-й и 5-й степени в радикалах / Л.П. Белкин. – М.: Нобель Пресс, 2013. – 55 с.

2. Курош А.Г. Алгебраические уравнения произвольных степеней / А.Г. Курош. – М.: Наука, 1975 – 32 с.

3. Кутищев Г.П. Решение алгебраических уравнений произвольной степени. Теория, методы, алгоритмы. – URSS, 2015. – 232 с.

4. Млодзеевский Б.К. Основы высшей алгебры / Б.К. Млодзеевский. – Либроком, 2016. – 114 с.