Алексеева Валентина Евгеньевна
канд. физ.-мат. наук, доцент
ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный
лесотехнический университет им. С.М. Кирова»
г. Санкт-Петербург

О ПРЕОДОЛЕНИИ ЗАТРУДНЕНИЙ ПРИ ИЗУЧЕНИИ ПОНЯТИЯ «ИМПЛИКАЦИЯ» В КУРСЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ

Аннотация*: в данной статье рассмотрена проблема усвоения понятия «импликация» изучающими математическую логику. Представлен методический подход к объяснению понятия импликация.*

Ключевые слова*: импликация, логические связки, логические операции, высказывания.*

В математической логике, как и в других математических дисциплинах, одни понятия воспринимаются студентами легко, другие – с трудом. К последним относится импликация, $A \to B$, что означает «если *A*, то *B*», «из *A* следует В», «*A*, следовательно, В».

Смысл логических операций обычно поясняется таблицами истинности. В отличие от таблиц истинности для таких логических операций, как конъюнкция ($A \wedge B$), дизъюнкция ($A \vee B$) и эквивалентность ($A \leftrightarrow B$), таблица истинности для импликации не только не делает эту логическую связку более понятной, но, наоборот, вызывает поначалу неприятие.

Напомним таблицу истинности для импликации (0 – ложь, 1- истина).

Таблица 1

A	B	$A \to B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Третья строка таблицы обычно не вызывает возражений, поскольку ситуация, когда *A* истинно, а *B* ложно, противоречит нашему интуитивному представлению о том, что «из *A* следует *B*» и мы легко соглашаемся с тем, что в этом случае высказывание $A \to B$ ложно.

Четвёртую строку можно считать приемлемой, хотя и здесь возникают сомнения относительно того, что истинность *A* и *B* даёт право считать истинной импликацию $A \to B$.

А вот с первыми двумя строками проблема – из ложной посылки выводить что бы то ни было не хочется. С первой строкой ещё можно смириться – формула «если *A* ложно, то *B* ложно» частенько используется в конфликтных бытовых ситуациях, например, «Пускай безумец я, но вы... Вы – бесчестный соблазнитель!» (из либретто оперы «Евгений Онегин»). Но вторая строка, свидетельствующая о том, что из «лжи» следует «истина», выглядит абсурдной.

Чтобы убедить слушателя в том, что приведённые в таблице значения истинности импликации – единственный способ разумной формализации рассуждений типа «если *A*, то *B*», «из *A* следует *B*», предлагаем следующий методический подход.

Таблица 2

A	B	$A \to B$	$B \to A$	$A \leftrightarrow B$
0	0	α	α	1
0	1	β	0	0
1	0	0	β	0
1	1	γ	γ	1

Заменим вызывающие сомнения логические единицы в третьем столбце таблицы истинности для импликации буквами α, β, γ. Добавим столбцы для импликации $B \to A$ и эквивалентности $A \leftrightarrow B$.

Очевидно, что в первой и четвёртой строках значения истинности для $A \to B$ и $B \to A$ должны быть одинаковыми, поскольку значения истинности для *A* и *B* в этих строках совпадают. Вторая строка для $A \to B$ имеет тот же смысл, что третья строка для $B \to A$, поэтому и значения истинности импликаций там и там – β.

Как известно, эквивалентность $A \leftrightarrow B$ представляет собой конъюнкцию импликаций $(A \rightarrow B)$ и $(B \rightarrow A)$, то есть $A \leftrightarrow B = (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$. А поскольку конъюнкция может давать единицу только в том случае, когда обе её компоненты истинны, ясно, что α = 1, γ = 1. Если β положить равным нулю, окажется, что разницы между импликацией и эквивалентностью нет, с чем никак нельзя согласиться. Остаётся один вариант β = 1.

Проделанная работа привела нас к необходимости согласиться с тем, что третий столбец таблицы истинности для импликации не может быть иным.

Для тех, кого приведённые выше рассуждения не убеждают, приведём ещё одно объяснение понятия импликация.

Таблица 3

A	B	$\overline{A}$	$A \wedge B$	$A \wedge B \vee \overline{A}$
0	0	1	0	1
0	1	1	0	1
1	0	0	0	0
1	1	0	1	1

Не меняя смысла фразы «если *A*, то *B*», несколько расширим её – «если *A*, то *B*, либо не *A*». Иными словами, «либо *A* и тогда *B*, либо не *A*», или «либо *A* и *B*, либо не *A*». Таким образом, $A \rightarrow B = A \wedge B \vee \overline{A}$. Составляя таблицу истинности для правой части этого равенства, автоматически получаем таблицу истинности и для импликации. «Новые» значения истинности импликации, совпадают с теми, что приведены в самом начале.

Разобравшись с таблицей истинности для импликации, полезно рассмотреть несколько простых вопросов, связанных с этой важной логической операцией.

Таблица 4

A	$\overline{A}$	$A \rightarrow \overline{A}$
0	1	1
1	0	0

Что можно сказать об импликациях $A \rightarrow A$ и $A \rightarrow \overline{A}$? Тождественная истинность первой очевидна, *A* из *A* несомненно следует. Но следует ли $\overline{A}$ из *A*? На первый взгляд – нет, не следует. На самом деле, как видно из таблицы, $A \to \overline{A} = \overline{A}$. Это значит, что если A ложно, то $\overline{A}$ из него следует.

Полагая A равным «*Л*» (тождественно ложному высказыванию) в тождествах $A \to A$ = «*И*» («*И*» – тождественно истинное высказывание) и $A \to \overline{A} = \overline{A}$, получим, что «*Л*»$\to$«*Л*» = «*И*», «*Л*»$\to$«*И*» = «*И*».

Тот факт, что из ложного утверждения можно вывести как ложное, так и истинное утверждение иллюстрируется следующими простыми примерами:

1. Умножим обе части неверного равенства 2 = 3 на 2. Получим неверное равенство 4 = 6.

2. Умножим обе части неверного равенства 2 = 3 на 0. Получим верное равенство 0 = 0.

Так как импликации «*Л*»$\to$«*Л*» и «*Л*»$\to$«*И*» тождественно истинны, их конъюнкция, («*Л*»$\to$«*Л*»)$\wedge$(«*Л*»$\to$«*И*»), также тождественно истинна. Это значит, что из «лжи» следует как «ложь», так и «истина», так что работа с неверными посылками непродуктивна и их нужно отбрасывать сразу.