Алексеева Валентина Евгеньевна
канд. физ.-мат. наук, доцент
ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный
лесотехнический университет им. С.М. Кирова»
г. Санкт-Петербург

DOI 10.21661/r-118972

УСЛОВНАЯ ВЕРОЯТНОСТЬ И «ВЕРОЯТНОСТЬ ПРИ УСЛОВИИ» (МЕТОДИЧЕСКИЙ АСПЕКТ)

***Аннотация**: статья содержит строгое описание ситуации, в которой условная вероятность одного события относительно другого может быть вычислена как вероятность первого при условии, что второе произошло. Это даёт теоретическое обоснование решений задач по теории вероятностей, использующих понятие условной вероятности.*

***Ключевые слова**: вероятность, вероятностное пространство, условная вероятность, теорема умножения вероятностей, формула Бернулли.*

Изучение основ теории вероятностей включает в себя решение задач, среди которых есть задачи, предполагающие использование понятия условной вероятности.

Решения таких задач даются обычно без надлежащего теоретического обоснования. Определение условной вероятности негласно подменяется другим, вместо условной вероятности вычисляется «вероятность при условии», что существенно облегчает решение. При этом результат получается верный, поскольку такая подмена обычно совершается лишь тогда, когда интуиция подсказывает, что это не приведёт к ошибке.

Современный уровень строгости изложения теории вероятностей в технических вузах (в программу входит аксиоматическое определение вероятности) обязывает внести ясность в этот вопрос, уточнив терминологию и описав ситуацию, в которых замена условной вероятности «вероятностью при условии» законна.

Как известно, условная вероятность есть отношение вероятности произведения двух событий к вероятности одного из них. Если речь идёт о событиях A и B с ненулевыми вероятностями, то можно рассматривать две условные вероятности $\frac{P(AB)}{P(A)}$ и $\frac{P(AB)}{P(B)}$, которые обозначаются $P_A(B)$ и $P_B(A)$, соответственно. Для определённости будем говорить только об одной из них.

Условная вероятность $P_A(B)$ называется условной вероятностью события B относительно события A. Как уже было сказано, $P_A(B) = \frac{P(AB)}{P(A)}$. Из этого определения следует, что для вычисления $P_A(B)$, нужно сначала найти $P(AB)$.

Напомним, что если изначально рассматривается вероятностное пространство (Ω, F_Ω, P) и $A, B \in F_\Omega$ (здесь Ω – множество элементарных событий, F_Ω – множество событий, P – нормированная мера, заданная на F_Ω), то условная вероятность $P_A(B)$ есть вероятность события AB в вероятностном пространстве (A, F_A, P_A), где F_A состоит из пересечений событий, принадлежащих F_Ω, с событием A.

Таким образом, во-первых, условная вероятность события B есть вероятность события AB, а не B, и, во-вторых, эта вероятность есть вероятность в новом вероятностном пространстве.

Наряду с термином «вероятность события B относительно события A» в учебной литературе часто используются другие, а именно: «вероятность события B при условии осуществления события A», «вероятность события B при условии A», «вероятность события B при условии появления события A», «вероятность события B, при условии что A произошло» (будем говорить о них как о «вероятности при условии»). Такая терминология создаёт иллюзию, что определение содержится в самом термине и что для вычисления $P_A(B)$ достаточно предположить, что событие A произошло.

Чтобы отличить условную вероятность $P_A(B)$ в её правильном понимании от «вероятности при условии» как буквального истолкования слов «вероятность события B, при условии что A произошло», будем обозначать последнюю через $P(B/A)$, отступив от общепринятого в математической литературе порядка, согласно которому смысл обозначений $P_A(B)$ и $P(B/A)$ одинаков.

Опишем ситуацию, когда замена условной вероятности $P_A(B)$ «вероятностью при условии» $P(B/A)$ законна. Предположим, что элементарные исходы испытания равновозможны, число их конечно и равно n. Обозначим число элементарных исходов, благоприятствующих появлению события A, через m_A, события AB – через m_{AB}. Очевидно, что $P_A(B)=\dfrac{m_{AB}}{m_A}$.

Пусть множество элементарных исходов, благоприятствующих появлению события A, можно разбить на l групп, в каждой из которых содержится k исходов (для краткости здесь и далее под словом исход будем понимать элементарный исход испытания). Пусть, кроме того, в каждой такой группе число исходов, благоприятствующих появлению события B (а значит и AB), равно k_{AB}.

Тогда $m_A = l\cdot k$, $m_{AB}=k_{AB}\cdot l$, $P_A(B)=\dfrac{m_{AB}}{m_A}=\dfrac{k_{AB}\cdot l}{l\cdot k}=\dfrac{k_{AB}}{k}$ и, следовательно, $P_A(B)=\dfrac{k_{AB}}{k}$.

Для вычисления $P(B/A)$ предположим, что событие A произошло. Это значит, что имел место один из исходов, входящих в одну из l групп, на которые разбито множество исходов, благоприятствующих появлению события A. Введём в рассмотрение новое испытание – случайный выбор одного из k исходов, входящих в эту группу. При этом k_{AB} из их числа благоприятствуют событию B (поскольку новому испытанию отвечает новое вероятностное пространство, само событие B сужается до объединения этих k_{AB} исходов, приобретая несколько иной смысл), так что вероятность события B в новом вероятностном пространстве равна дроби $\frac{k_{AB}}{k}$, причём неважно, какая именно группа была взята. Это и есть «вероятность по условию» $P(B/A)$.

Как видно, в приведённой выше теоретической схеме «вероятность по условию» совпадает с условной вероятностью, $P(B/A)=P_A(B)$.

Преимущество «вероятности по условию» $P(B/A)$ состоит в том, что для её вычисления не нужно находить $P(AB)$. Напротив, именно с её помощью $P(AB)$ по теореме умножения можно найти.

Приведём примеры.

Задача №1. В коробке имеется 3 белых и 2 чёрных шарика. Случайным образом из неё извлекаются два шарика. Найти вероятность того, что оба вытащенных шарика белые.

Решение. Пусть шарики занумерованы, причём первые три номера отданы белым шарикам. Элементарные исходы испытания опишем при помощи таблицы (шарики извлекаем по очереди, фиксируя их номера).

Таблица 1

1 2	*1 3*	1 4	1 5
2 1	*2 3*	2 4	2 5
3 1	*3 2*	3 4	3 5
4 1	4 2	4 3	4 5
5 1	5 2	5 3	5 4

Обозначим через A событие, состоящее в том, что первым был вытащен белый шарик, через B – вторым вытащен белый шарик.

Исходы, благоприятствующие A, даны крупным шрифтом (жирным или нет), а исходы, благоприятствующие AB, – крупным жирным шрифтом.

Разобьём исходы, благоприятствующие A, на 3 группы ($l=3$). В первую группу войдут исходы, при которых первым был вытащен шарик №1 (первая строка таблицы). Во вторую – первым вытащен шарик №2 (вторая строка таблицы). В третью – первым вытащен шарик №3 (третья строка таблицы).

В каждой из них по 4 исхода (k =4), причём два из них благоприятствует появлению событию B (k_{AB} = 2).

Таким образом, ситуация, описанная в условии задачи, укладывается в рассмотренную нами теоретическую схему и $P(B/A)=\frac{k_{AB}}{k}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$. Отсюда и $P_A(B)=P(B/A)=\frac{1}{2}$.

Правомерными становятся следующие простые рассуждения. Если первым вытащен белый шарик, то остаётся 4 шарика, два из них белые, значит $P(B/A)=\frac{1}{2}$. Как правило, именно так задачу и решают.

Далее, по теореме умножения, $P(AB)=P(A)\cdot P_A(B)=\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{10}$.

Не будем останавливаться на обсуждении вычисления $P(A)$, так как оба подхода, извлечение двух или одного шарика в качестве испытания, дают один и тот же ответ, $P(A)=\frac{12}{20}=\frac{3}{5}$.

Задача №2. Шесть точек бросают на отрезок, разделённый на три равные части. Найти вероятность того, что в каждую часть попадут по две точки.

Решение. Будем считать, что каждая из шести точек имеет номер. Элементарные исходы испытания можно представить как упорядоченные шестёрки цифр 1, 2, 3. Например, шестёрка (3, 1, 1, 2, 2, 2) означает, что первая точка попала в третью часть, вторая и третья – в первую, а четвёртая, пятая и шестая – во вторую. Очевидно, что $n=3^6$.

Обозначим через A событие, состоящее в том, что в первую часть отрезка попали две точки, через B – во вторую часть попали две точки. Ясно, что AB – событие, состоящее в том, что и в первую, и во вторую, а значит, и в третью часть попали ровно две точки. Если мы найдём $P(AB)$, задача будет решена.

Разобьём множество элементарных исходов, благоприятствующих появлению события A, на группы следующим образом. Каждая группа будет определяться выбором двух номеров из шести, так что всего групп будет C_6^2. Пусть выбраны два номера. Рассмотрим все шестёрки цифр, в которых на местах с этими номерами стоят единицы, а на остальных местах – двойки и тройки. Таких шестёрок будет 2^4. Таким образом, $l = C_6^2$, $k = 2^4$, $m_A = l \cdot k = C_6^2 \cdot 2^4$.

Возьмём одну из групп. Входящие в неё исходы можно изображать упорядоченными четвёрками цифр 2 и 3, причём благоприятствующим событию B исходам будут отвечать четвёрки, в которых цифра 2 встречается ровно два раза. Число таких четвёрок – k_{AB}.

Снова, как и в задаче №1, ситуация, описанная в условии задачи №2, укладывается в рассмотренную нами теоретическую схему.

Рассмотрим в качестве нового испытания случайный выбор одной из четвёрок, входящих в группу, а в качестве нового B – событие, состоящее в том, что выбранная четвёрка содержит ровно две двойки. Это испытание можно трактовать как бросание четырёх точек на отрезок, разделённый на две равные части, а под событием B понимать попадание на первую половину отрезка двух точек. Тогда вероятность так истолкованного события B, а это и есть «вероятность при условии», можно найти по формуле Бернулли. Таким образом, $P(B/A) = C_4^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2$, следовательно, и $P_A(B) = C_4^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2$.

Вероятность события A также можно найти по формуле Бернулли, поскольку попадание двух шариков в первую часть отрезка эквивалентно двум успехам в серии из шести независимых испытаний, в каждом из которых вероятность успеха равна одной трети, $P(A) = C_6^2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^4$.

Осталось применить теорему умножения вероятностей.

$$P(AB) = C_6^2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^4 \cdot C_4^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{2}{5 \cdot 3^6}.$$

В задачах №1 и №2 была реализована ситуация совпадения условной вероятности с «вероятностью при условии». Но так бывает далеко не всегда. Приведём пример, когда само понятие «вероятности при условии» не имеет смысла, поскольку появление события A не даёт определённости, необходимой для вычисления $P(B/A)$.

Задача №3. В коробке имеется 3 белых и 2 чёрных шарика. Шарики занумерованы, причём первые три номера отданы белым шарикам. Случайным образом поочерёдно из коробки извлекаются два шарика. При этом если первым извлечён шарик №1, то к оставшимся шарикам автоматически добавляется ещё один белый, №6. Найти вероятность того, что оба вытащенных шарика будут белые.

Составим таблицу элементарных исходов испытания.

Таблица 2

1 2	*1 3*	1 4	1 5	*1 6*
2 1	*2 3*	2 4	2 5	
3 1	*3 2*	3 4	3 5	
4 1	4 2	4 3	4 5	
5 1	5 2	5 3	5 4	

Очевидно, что исходы не являются равновозможными. Исходы первой строки имеют вероятности, равные $\frac{1}{25}$, остальные – $\frac{1}{20}$.

Предположим, что первый этап исходного испытания завершён, причём вытащен белый шарик, то есть произошло событие A. Здесь, в отличие от задач №1 и №2, мы сталкиваемся с ситуацией, когда неизвестно, сколько имеется шариков, 4 или 5. Второй этап испытания, извлечение второго шарика, происходит в условиях неопределённости, так что не очень понятно, какой смысл может иметь $P(B/A)$.

Поэтому $P(AB)$ проще всего вычислить непосредственно, сложив вероятности исходов, благоприятствующих появлению AB.

$$P(AB)=\tfrac{1}{25}\cdot 3+\tfrac{1}{20}\cdot 4=\tfrac{8}{25}.$$

С другой стороны, всё же можно и в задаче №3 использовать условную вероятность $P_A(B)$ для вычисления $P(AB)$.

Обозначим через A_1 событие, состоящее в том, что первым извлечён шарик №1, а через A_2 – событие, состоящее в том, что первым извлечён шарик №2 или №3. Очевидно, что A_1 и A_2 несовместны и их сумма равна A.

Произведём некоторые выкладки.

$$P_A(B)=P_{A_1+A_2}(B)=\frac{P((A_1+A_2)B)}{P(A_1+A_2)}=\frac{P(A_1B)}{P(A_1)}\frac{P(A_1)}{P(A_1+A_2)}+\frac{P(A_2B)}{P(A_2)}\frac{P(A_2)}{P(A_1+A_2)}=$$

$$=P_{A_1}(B)\frac{P(A_1)}{P(A)}+P_{A_2}(B)\frac{P(A_2)}{P(A)}=P_{A_1}(B)P_A(A_1)+P_{A_2}(B)P_A(A_2).$$

Условные вероятности $P_{A_1}(B)$, $P_A(A_1)$, $P_{A_2}(B)$, $P_A(A_2)$ могут быть истолкованы (подробности опускаем) как $P(B/A_1)$, $P(A_1/A)$, $P(B/A_2)$, $P(A_2/A)$.

Тогда $P_A(B)=P(B/A_1)P(A_1/A)+P(B/A_2)P(A_2/A)=P_A(B)=\tfrac{3}{5}\cdot\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{2}{3}=\tfrac{8}{15}$, и $P(AB)=\tfrac{3}{5}\cdot\tfrac{8}{15}=\tfrac{8}{25}$.

Вряд ли задачу №3 стоит решать таким образом, тем не менее полученное в процессе этого решения равенство $P_A(B)=P_{A_1}(B)P_A(A_1)+P_{A_2}(B)P_A(A_2)$ кажется заслуживающим внимания.