УДК 519.6
DOI 10.21661/r-117454

А.Т. Григорьев, А.О. Казакова

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ МНОЖЕСТВА РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ С БЕСКОНЕЧНОЙ ЛЕСТНИЦЕЙ СТЕПЕНЕЙ

***Аннотация**: в данной статье исследуется уравнение с бесконечной лестницей степеней (тетрацией). Тетрация не является элементарной функцией, поэтому применение к решению уравнения рассуждений, пригодных для алгебраических и трансцендентных функций, приводит к ошибочному и парадоксальному выводу. В работе проведен численный анализ множества решений уравнения с тетрацией и сделаны выводы о разрешимости задачи для различных значений правой части уравнения.*

***Ключевые слова**: тетрация, сходимость, функциональная и числовая последовательности, математический пакет Maple.*

A.T. Grigorev, A.O. Kazakova

NUMERICAL RESEARCH OF THE SET OF SOLUTIONS OF THE EQUATION WITH INFINITE STAIRS OF DEGREES

***Abstract**: the article researches the equation with infinite degrees of stairs (tetration). Tetration is not an elementary function, so the application to the solution of the arguments, that are suitable for algebraic and transcendental functions, leads to erroneous and paradoxical conclusion. The work presents the numerical analysis of the set of solutions of the equation with titration and makes some conclusions of the solvability of the problem for different values of the right-hand side of the equation.*

***Keywords**: tetration, convergence, functional and numerical sequences, mathematical Maple program.*

1. Постановка задачи и решение в терминах элементарных функций. На множестве положительных чисел требуется найти решение уравнения

$$x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}} = a, \quad a > 0. \tag{1}$$

Введем следующее обозначение ${}^{n}x = \underbrace{x^{x^{\cdot^{\cdot^{x}}}}}_{n}$. Например,

$${}^{4}2 = 2^{2^{2^{2}}} = 2^{\left(2^{\left(2^{2}\right)}\right)} = 2^{\left(2^{4}\right)} = 2^{16} = 65536.$$

Тогда уравнение (1) перепишется в виде:

$${}^{\infty}x = a. \tag{2}$$

Одно из возможных и, на первый взгляд, логичных решений рассматриваемой задачи сводится к следующим рассуждениям: поскольку в правой части уравнения (1) записана бесконечная лестница степеней, то оно эквивалентно записи $x^{{}^{\infty}x} = a$, откуда, с учетом равенства (2),

$$x^{a} = a \quad \Rightarrow \quad x = a^{1/a}. \tag{3}$$

2. Парадокс полученного решения. Рассмотрим уравнение (1) при некоторых фиксированных значениях a. Согласно решению (3),

при $a = 2$: ${}^{\infty}x = 2 \quad \Rightarrow \quad x = 2^{1/2} = \sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad {}^{\infty}\left(\sqrt{2}\right) = 2$,

при $a = 4$: ${}^{\infty}x = 4 \quad \Rightarrow \quad x = 4^{1/4} = \sqrt[4]{4} = \sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad {}^{\infty}\left(\sqrt{2}\right) = 4$,

откуда $2 = 4$! Этот парадокс говорит об ошибочности или неполноте изложенных в п. 1 рассуждений. Это связано с тем, что функция $f(x) = {}^{\infty}x$ не относится к числу элементарных, в терминах которых получено решение (3).

Рассмотрим функциональную последовательность

$$f_n(x) = {}^{n}x, \quad n \in \mathbf{N}. \tag{4}$$

Первые три члена этой последовательности имеют вид $f_1(x) = x$, $f_2(x) = x^{x}$, $f_3(x) = x^{x^{x}}$. Равенство (4) можно записать также в виде рекуррентной формулы

$$f_n(x) = x^{f_{n-1}(x)}, \quad f_1(x) = x, \quad n \in \mathbf{N}. \tag{5}$$

Подставляя в выражение (4) некоторое частное значение x, получаем числовую последовательность, которая может сходиться или расходиться. Например, несложно проверить следующие результаты:

1) при $x=2$ последовательность (4) расходится, т.к. $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(2)=\infty$;

2) при $x=\sqrt{2}$ последовательность (4) сходится к числу 2;

3) при $x=\sqrt[3]{3}$ последовательность (4) сходится к числу ≈ 2.47805;

4) при $x=\sqrt[4]{4}$ последовательность (4) сходится к числу 2.

Эти примеры показывают, что формула (3) справедлива для некоторых, но не для всех, положительных значений a, и уравнение (1) разрешимо лишь для некоторых значений параметра a, так как область сходимости последовательности (4) отлична от множества всех положительных чисел.

3. Численное исследование задачи. Для проведения численного анализа множества решений уравнения (1) была составлена программа определения сходимости числовой последовательности

$$f_n\left(a^{1/a}\right), \quad n\in\mathbf{N}, \quad a>0 \tag{6}$$

при различных значениях a с использованием математического пакета Maple.

Алгоритм программы основан на определении сходящейся числовой последовательности [1] и заключается в последовательном вычислении по рекуррентной формуле (5) значений членов числовой последовательности (6) до тех пор, пока при некотором n не выполнится условие

$$d_n(a)=\left|f_n\left(a^{1/a}\right)-f_{n-1}\left(a^{1/a}\right)\right|<\varepsilon, \tag{7}$$

где $\varepsilon -$ наперед заданное сколь угодно малое значение, определяющее точность найденного предела последовательности (6). Если условие (7) при некотором n выполняется, то последовательность сходится и $f_n\left(a^{1/a}\right)$ принимается за приближенное значение ее предела. Если же значение $d_n(a)$ с увеличением n не уменьшается, то последовательность расходится.

Как показали проведенные вычисления, в зависимости от значения параметра a возможны 3 случая сходимости числовой последовательности (6):

1) последовательность (6) расходится (рис. 1);

2) последовательность (6) сходится к числу a (рис. 2);

3) последовательность (6) сходится к числу, отличному от a (рис. 3).

```
> Digits:=20: eps:=10^(-10): a:=0.3;
                                    a := 0.3
> x:=a^(1/a): f[0]:=evalf(x): f[1]:=evalf(x^f[0]):
> d[1]:=abs(f[1]-f[0]): s:='сходится':
> for n from 2 while d[n-1]>eps do
  f[n]:=evalf(x^f[n-1]); d[n]:=abs(f[n]-f[n-1]);
  if d[n]>=d[n-1] then d[n]:=0; s:='расходится';
  fi; od:
> print(s); print(n-1); print(f[n-1]);
                                   расходится
                                       94
                             0.027485354102426546300
```

Рис. 1. Последовательность (6) расходится

```
> Digits:=20: eps:=10^(-10): a:=2;
                                     a := 2
> x:=a^(1/a): f[0]:=evalf(x): f[1]:=evalf(x^f[0]):
> d[1]:=abs(f[1]-f[0]): s:='сходится':
> for n from 2 while d[n-1]>eps do
  f[n]:=evalf(x^f[n-1]); d[n]:=abs(f[n]-f[n-1]);
  if d[n]>=d[n-1] then d[n]:=0; s:='расходится';
  fi; od:
> print(s); print(n-1); print(f[n-1]);
                                    сходится
                                       59
                              1.9999999998220440419
```

Рис. 2. Последовательность (6) сходится к числу a

```
> Digits:=20: eps:=10^(-10): a:=3;
                                   a := 3
> x:=a^(1/a): f[0]:=evalf(x): f[1]:=evalf(x^f[0]):
> d[1]:=abs(f[1]-f[0]): s:='сходится':
> for n from 2 while d[n-1]>eps do
  f[n]:=evalf(x^f[n-1]); d[n]:=abs(f[n]-f[n-1]);
  if d[n]>=d[n-1] then d[n]:=0; s:='расходится';
  fi; od:
> print(s); print(n-1); print(f[n-1]);
                                 сходится
                                   203
                           2.4780526793661012151
```

Рис. 3. Последовательность (6) сходится к числу, отличному от a

Для определения области сходимости последовательности (6) к числу a с помощью составленной программы были проведены вычисления для значений $a>0$ с шагом 0.1 и точностью $\varepsilon=10^{-10}$ (результаты представлены в таблице 1).

Таблица 1

Исследование сходимости с шагом 0.1

a	0.1	0.2	0.3	*0.4*	*0.5*	*0.6*	*0.7*	*0.8*	*0.9*	*1.0*	*1.1*	*1.2*	*1.3*	*1.4*	*1.5*	*1.6*	*1.7*
Сходимость последовательности	Р	Р	Р	С	С	С	С	С	С	С	С	С	С	С	С	С	С
Предел последовательности	–	–	–	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7
a	*1.8*	*1.9*	*2.0*	*2.1*	*2.2*	*2.3*	*2.4*	*2.5*	*2.6*	*2.7*	2.8	2.9	3.0	3.1	3.2	3.3	3.4
Сходимость последовательности	С	С	С	С	С	С	С	С	С	С	С	С	С	С	С	С	С
Предел последовательности	1.8	1.9	2.0	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5	2.6	2.7	2.64	2.56	2.48	2.41	2.35	2.29	2.15

Как видно из таблицы 1, получены следующие результаты вычислений:

1) при $a\in[0.1,0.3]$ последовательность (6) расходится;

2) при $a\in[0.4,2.7]$ последовательность (6) сходится к a;

3) при $a\geq 2.8$ последовательность (6) сходится к числу, отличному от a.

Для дальнейшего уточнения границ области сходимости последовательности (6) к числу a были проведены вычисления для значений $a\in[0.3,0.4]\cup[2.7,2.8]$ с шагом 0.01 (результаты представлены в таблице 2).

Таблица 2

Исследование сходимости с шагом 0.01

a	0.31	0.32	0.33	0.34	0.35	0.36	*0.37*	*2.71*	2.72	2.73	*e*	*1/e*
Сходимость последовательности	Р	Р	Р	Р	Р	Р	С	С	С	С	С	С
Предел последовательности	–	–	–	–	–	–	0.37	2.71	2.716	2.707	*e*	*1/e*

Можно заметить, что: промежутку $\left[2.71, 2.72\right]$, в котором содержится граница раздела областей сходимости к числу a и сходимости к числу, отличному от a, принадлежит трансцендентное число $\breve{a}$; промежутку $\left[0.36, 0.37\right]$, в котором содержится граница раздела областей расходимости и сходимости к числу a, принадлежит число e^{-1}. Поэтому можно выдвинуть гипотезу о том, что область значений функции $f_\infty(x) = {}^\infty x$ представляет собой отрезок $\left[e^{-1}, e\right]$. Дальнейшие уточняющие расчеты, проведенные с шагом 0.001 и 0.0001, подтверждают эту гипотезу.

4. Графический анализ функции тетрации. Для проведения графического анализа множества значений функции $f_\infty(x) = {}^\infty x$ был использован электронный ресурс [2]. Построение графика функции с бесконечной лестницей степеней на практике весьма затруднительно, поэтому было проведено построение графиков функции $f_n(x) = {}^n x$ для некоторых больших натуральных значений n. В частности, на рис. 4 показан график функции $f_{300}(x) = {}^{300}x$.

Как видно из графика, представленного на рис. 4, область значений функции $f_{300}(x)$ лежит приблизительно в пределах от 0 до e, т.е. не равна отрезку $\left[e^{-1}, e\right]$. Это связано с тем, что число $n = 300$, хотя и достаточно велико, но конечно. С увеличением значения n график функции $f_n(x)$ приближается к графику функции $f_\infty(x) = {}^\infty x$, изображенному на рис. 5 (источник – [3]).

5. *Выводы.* Проведенное численное и графическое исследование позволяет сделать вывод о том, что областью значений функции $f_\infty(x) = {}^\infty x$ является отрезок $\left[e^{-1}, e\right]$. Следовательно, при $a \in \left[e^{-1}, e\right]$ уравнение (1) имеет решение $x = a^{1/a}$, при $a \notin \left[e^{-1}, e\right]$ уравнение (1) не имеет решений.

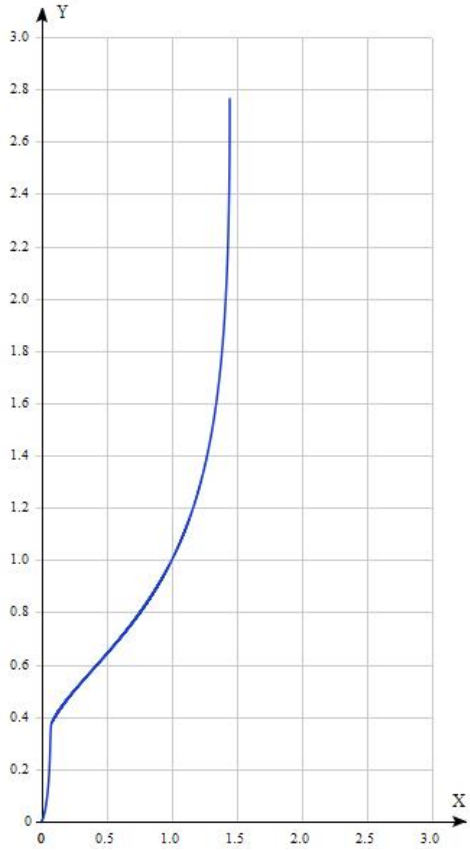

Рис. 4. График функции $f_{300}(x)$

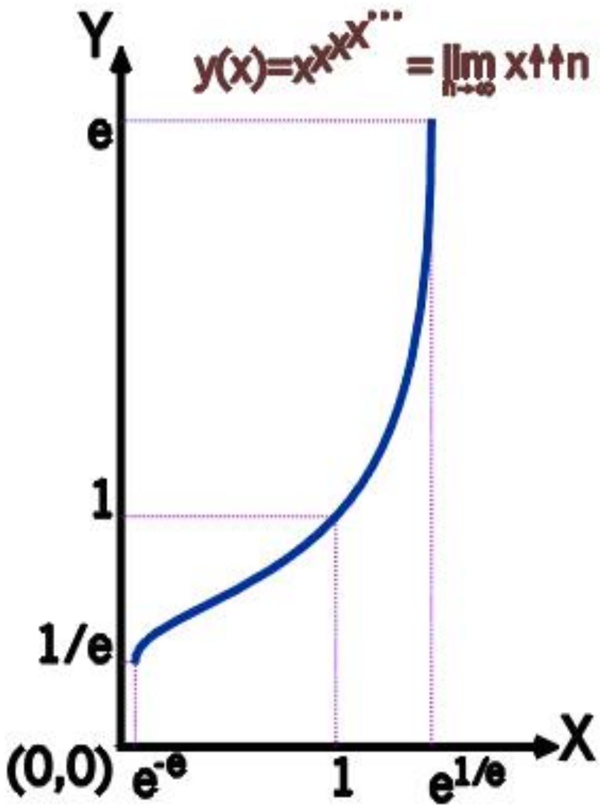

Рис. 5. График функции $f_\infty(x)$

Список литературы

1. Шипачев В.С. Высшая математика: Учебник и практикум для бакалавров / Под ред. А.Н. Тихонова. – М.: Юрайт, 2014. – 447 с.

2. Построение графиков функций онлайн [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://yotx.ru

3. Тетрация [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://ru.wikipedia.org/wiki/тетрация

Григорьев Артем Тимурович – студент ФГБОУ ВО «Чувашский государственный университет им. И.Н. Ульянова», Россия, Чебоксары.

Grigorev Artem Timurovich – student FSFEI of HE "I.N. Ulyanov Chuvash State University", Russia, Cheboksary.

Казакова Анастасия Олеговна – канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры актуарной и финансовой математики ФГБОУ ВО «Чувашский государственный университет им. И.Н. Ульянова», Россия, Чебоксары.

Kazakova Anastasiya Olegovna – candidate of physical and mathematical sciences, associate professor of the Department of Actuarial and Financial Mathematics FSFEI of HE "I.N. Ulyanov Chuvash State University", Russia, Cheboksary.
